Напоминание: (ко)гомологии, расслоения, гомотопические группы

1◇1. Вычислите гомологии и когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$ следующих пространств: а) $\mathbb{R}P^n$;
б) $\mathbb{C}P^n$;
в) $\mathbb{H}P^n$;
г*) Вычислите когомологии $G_{n,k}(\mathbb{C})$;
д*) Вычислите когомологии $G_{n,k}(\mathbb{R})$.

1◇2. Пусть X и Y — CW-комплексы. Вычислите кольцо когомологий а) $X \vee Y$ б) $X \wedge Y$ в) $X * Y$, если известны кольца когомологий сомножителей.

1◇3. Существует ли отображение а) $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ б) $\mathbb{C}P^3 \to \mathbb{C}P^3$ степени 9?

1◇4. Докажите, что S^∞ стягиваема.

1◇5. Докажите, что любое односвязное замкнутое ориентируемое 3-мерное многообразие гомотопически эквивалентно S^3.

1◇6. а) Вычислите $\pi_3(S^2)$; б*) Вычислите $\pi_4(S^3)$.

1◇7. Напомним, что пространством Штифеля $\mathbb{R}V_{n,k}$ ($\mathbb{C}V_{n,k}$) называется множество всех ортонормированных (относительно стандартного положительно определенного скалярного произведения) k-реперов в n-мерном пространстве над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).
а) Вычислите $\pi_i(\mathbb{R}V_{n,k})$ при $i \leq n-k$;
б) Вычислите $\pi_i(\mathbb{C}V_{n,k})$ при $i \leq 2(n-k)+1$.

1◇8. Пусть G – группа Ли. Докажите, что её касательное расслоение тривиально.

1◇9. а) Докажите, что на S^{2n} не существует векторного поля, всюду отличное от нуля;
б) Докажите, что на S^{2n+1} есть векторное поле без нулей.

1◇10. Докажите, что тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$ нетривиально.

1◇11. Найдите тотальные пространства для расслоений ортонормированных реперов, ассоциированных со следующими векторными расслоениями:
а) Касательное расслоение к S^n;
б) Тавтологическое расслоение $\gamma_{n,1}$ на $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{R}P^n$;
в) Тавтологическое расслоение $\gamma_{n,k}$ на грассманиане $G_{n,k}(\mathbb{C})$ и $G_{n,k}(\mathbb{R})$.

1◇12. Пусть $K \subset H \subset G$ – группы Ли. Докажите, что G/K является пространством главного расслоения над G/H со слоем H/K.

1◇13. Пусть G — группа, H — подгруппа, ξ — главное G-расслоение. Докажите, что ξ имеет H-структуру, если и только если ассоциированное с ξ G/H-расслоение иммет глобальное сечение.
а) Постройте локально-тривиальное расслоение $S^2 \to \mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathbb{H}P^n$.

1◇14. Выпишите склеивающий коцикл для следующих расслоений:
а) Тавтологическое расслоение $\gamma_{n,1}$ на $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{R}P^n$;
б) Тавтологическое расслоение $\gamma_{n,k}$ на грассманиане $G_{n,k}(\mathbb{C})$ и $G_{n,k}(\mathbb{R})$.

1◇15. Докажите, что множество линейных расслоений с данной связной базой образует группу (относительно операции тензорного произведения). Выясните, как эта группа связана с когомологиями базы.

1◇16. а) Любое главное расслоение над S^1 с линейно связной группой тривиально. В частности, всякое комплексное расслоение над окружностью тривиально;

б) Для любого пространства X множество n-мерных комплексных расслоений $Vect_n(S(X))$ естественно изоморфно $[X, GL_n(\mathbb{C})]$;
в) Классифицируйте одномерные расслоения над S^2;
г*) Расклассифицируйте векторные расслоения над S^3.

1⋄17. Пусть ξ – векторное расслоение над базой X:
а) Докажите, что редукция структурной группы к $O(n, \mathbb{R})$ эквивалентна тому, что существует послойное евклидово скалярное произведение;
б) Докажите, что на вещественном векторном расслоении над паракомпактной базой всегда существует евклидово скалярное произведение (т.е. всегда существует редукция структурной группы к $O(n, \mathbb{R})$);
в) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для комплексных векторных расслоений;
г) Докажите, что редукция структурной группы к $GL_+(n, \mathbb{R})$ эквивалентно выбору ориентации;
д) Докажите, что редукция структурной группы $2n$-мерного векторного расслоения к $GL_(n, \mathbb{C})$ эквивалентно выбору эквивалентна выбору комплексной структуры;
е) Чему эквивалентна редукция структурной группы к $SL(n, \mathbb{R})$ и к $SU(n)$?

1⋄18*. Пусть ξ – вещественное векторное расслоение над базой X:
а) Пусть $g_{\alpha\beta}$ – склеивающий коцикл ξ. Докажите, что $\det(g_{\alpha\beta})$ задает элемент в первых когомологиях Чеха базы с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Докажите, что этот класс совпадает с первым классом Штифеля-Уитни $w_1(\xi)$;
б) Выпишите второй класс Штифеля-Уитни $w_2(\xi)$ в терминах чеховских коцепей;
в) Докажите, что редукция структурной группы ξ к $Spin(n)$ возможна тогда и только тогда, когда $w_2(\xi) = 0$;