ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 1: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И PL-МНОГООБРАЗИЯ, ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Вычислите группы локальных гомологий $H_i(X, X \setminus x)$ для графа X и его произвольной точки x.

2. Докажите, что S^n, T^n, $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ являются замкнутыми многообразиями, а шар D^n и полноторие $D^2 \times S^1$ являются многообразиями с краем.

PL-сферой рамерности n называется симплициальный комплекс, некоторое подразбиение которого изоморфно подразбиению границы $(n+1)$-мерного симплекса. *PL-многообразием* рамерности n называется симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, для которого линк $\operatorname{lk} \sigma = \{\tau \in \mathcal{K} \colon \tau \cup \sigma \in \mathcal{K}, \tau \cap \sigma = \varnothing\}$ каждого непустого симплекса σ является PL-сферой размерности $n - 1 - \dim \sigma$.

3. Докажите, что если $\mathcal{K}$ — PL-многообразие, то $|\mathcal{K}|$ — многообразие.

4. Докажите, что граница симплициального многогранника является PL-сферой.

5. Докажите, что если $\mathcal{K}$ — n-мерное PL-многообразие, то $H_i(|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}| \setminus x) = 0$ при $i \neq n$ и $H_n(|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}| \setminus x) = \mathbb{Z}$, для любой точки $x \in |\mathcal{K}|$ (т. е. $|\mathcal{K}|$ является *гомологическим многообразием*).

6. Докажите, что если $|\mathcal{K}|$ — триангуляция n-мерного многообразия, то для любого непустого i-мерного симплекса σ линк $\operatorname{lk}_{\mathcal{K}} \sigma$ имеет гомологии как у $(n - i - 1)$-мерной сферы.

7. Докажите, что связное PL-многообразие $\mathcal{K}$ размерности n *сильно связно*, т. е. любой $(n-1)$-симплекс содержится в точности в двух n-симплексах, и любые два n-симплекса можно соединить цепочкой из n-симплексов, в которой любые два последовательных n-симплекса имеют общую $(n - 1)$-мерную грань.

8. Докажите, что любая триангуляция связного многообразия сильно связна в смысле предыдущей задачи.

9. Докажите, что если связное PL-многообразие ориентируемо, то на нём имеется в точности две ориентации.

Для каждого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ определим «барицентрическую звезду» как следующий подкомплекс в барицентрическом подразделении $\mathcal{K}'$:

$$\sigma^* = \bigl\{(\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots) \in \mathcal{K}' \colon \sigma \subset \sigma_1\bigr\}.$$

Определим также

$$\partial\sigma^* = \bigl\{(\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots) \in \mathcal{K}' \colon \sigma \subsetneq \sigma_1\bigr\}, \quad \sigma^\circ = \sigma^* \setminus \partial\sigma^*.$$

10. Пусть $\mathcal{K}$ — PL-многообразие. Докажите, что «открытые барицентрические звёзды» σ° симплексов $\sigma \in \mathcal{K}$ образуют клеточное разбиение пространства $|\mathcal{K}|$.

Date: 14 февраля 2019 г.