ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 10: КЛАССЫ ПОНТРЯГИНА

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что для комплексного векторного расслоения ξ имеют место равенства $c_k(\xi) = w_{2k}(\xi_{\mathbb{R}}) \mod 2$ и $w_{2k+1}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0$.

2. Докажите, что для кватернионного векторного расслоения ξ имеют место равенства $p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}})$ и $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$.

3. Вычислите классы Понтрягина (касательного расслоения) $\mathbb{C}P^n$.

4*. Вычислите классы Понтрягина (касательного расслоения) $\mathbb{H}P^n$. *Указание.* Как и в комплексном случае, $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma_{\mathbb{H}}, \gamma_{\mathbb{H}}^{\perp})$. Однако $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma_{\mathbb{H}}, \gamma_{\mathbb{H}})$ не является одномерным тривиальным кватернионным расслоением, а является нетривиальным вещественным 4-мерным расслоением.

5. Докажите, что для любого двулистного накрытия $\widetilde{B} \to B$ имеет место точная последовательность когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$:

$$\ldots \longrightarrow H^{k-1}(B) \xrightarrow{\cdot w_1} H^k(B) \longrightarrow H^k(\widetilde{B}) \longrightarrow H^k(B) \longrightarrow \ldots,$$

где w_1 — первый класс Штифеля–Уитни одномерного расслоения над B, ассоциированного с накрытием.

6. Докажите, что

$$H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \ldots, w_n],$$

где $w_i = w_i(\widetilde{\eta})$ — универсальные классы Штифеля–Уитни. *Указание:* используйте двулистное накрытие $BSO(n) \to BO(n)$, предыдущую задачу и вычисление $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_n]$.

7. Докажите, что если R — коммутативное кольцо, содержащее $\frac{1}{2}$, то

$$H^*(BO(n); R) \cong R[p_1, \ldots, p_{[\frac{n}{2}]}],$$

где $p_i = p_i(\eta)$ — универсальные классы Понтрягина. *Указание:* используйте двулистное накрытие $BSO(n) \to BO(n)$ и вычисление $H^*(BSO(n); R)$.

8. Для каждого разбиения $\omega = (i_1, \ldots, k_k)$ числа $n = i_1 + \ldots + i_k$ определим *число Штифеля–Уитни* компактного многообразия M^n:

$$w_\omega[M^n] = \langle w_{i_1} \cdots w_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

число Чженя компактного комплексного многообразия M^{2n}:

$$c_\omega[M^{2n}] = \langle c_{i_1} \cdots c_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^{2n}] \rangle \in \mathbb{Z}$$

и *число Понтрягина* компактного ориентированного многообразия M^{4n}:

$$p_\omega[M^{4n}] = \langle p_{i_1} \cdots p_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^{4n}] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Вычислите все числа Штифеля–Уитни пространства $\mathbb{R}P^n$, числа Чженя и Понтрягина пространства $\mathbb{C}P^n$.

9. Докажите, что если M^n является границей компактного многообразия W^{n+1}, то $w_\omega[M^n] = 0$ для любого разбиения ω. Аналогично, если M^{4n} является границей ориентированного компактного многообразия W^{4n+1}, то $p_\omega[M^{4n}] = 0$ для любого ω.

10. Докажите, что $\mathbb{R}P^{2n}$ и $\mathbb{C}P^{2n}$ не являются границами никакого компактного многообразия, а $\mathbb{R}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n+1}$ являются границами компактных многообразий.

Date: 18 апреля 2019 г.