ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 11: СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССЛОЕНИЯ

ЗАМЕНЯЮЩИЙ ЛЕКТОР: Г. Д. СОЛОМАДИН

1. Примените теорему Лере к СП фильтрации, чтобы:

а) Для пары $X \subset Y$ вывести точную последовательность пары в сингулярных гомологиях.

б) То же для тройки $X \subset Y \subset Z$.

в) Для конечного CW-комплекса X и его фильтрации остовами $\dots \subset X_k \subset \dots$, $X_k = \operatorname{sk}^k X$ показать изоморфизм клеточных и сингулярных гомологий X.

2. Для локально тривиального расслоения $\xi = (E, B, F, \pi)$ над односвязной базой B покажите, что композиции

$$H_p(E) \to F_pH_p(E)/F_{p-1}H_p(E) \simeq E^\infty_{p,0} \hookrightarrow E^2_{p,0} \simeq H_p(B;\ H_0(F)) \simeq H_p(B)$$

$$H_q(F) \to H_0(B;\ H_q(F)) \simeq E^2_{0,q} \twoheadrightarrow E^\infty_{p,0} \simeq F_0H_q(E)/F_{-1}H_q(E) \simeq H_q(E)$$

индуцированы проекцией $E \to B$ и вложением слоя $F \subset E$, соответственно.

3. В условиях предыдущей задачи, покажите, что $\chi(E) = \chi(F) \cdot \chi(B)$, где $\chi(X)$ равно эйлеровой характеристике топологического пространства X. Указание: воспользуйтесь СП расслоения и вычислением χ в цепях.

4. а) Вычислите кольцо $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$, пользуясь расслоением $S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^n$

б) Вычислите когомологии проективного расслоения $\mathbb{P}(\xi) \to B$ над односвязной базой B.

в) Докажите, что группы $H^*(SU(n); \mathbb{Z})$ и $H^*(S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ изоморфны, пользуясь расслоением $SU(n) \xrightarrow{SU(n-1)} S^{2n-1}$.

г) Докажите изоморфизм колец из п.в). Указание: воспользуйтесь правилом Лейбница, чтобы показать вырождение дифференциалов на мультипликативных образующих СП в члене E_2.

5. (*Точные пары*) а) Рассмотрим точный комплекс градуированных $\mathbb{Z}$-модулей:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & A \arrow[dl, "g"] \\ & B \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}.$$

Зададим дифференциал $d_1 = g \circ h : B \to B$. Покажите, что треугольник (*вторая производная пара*)

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "f'"] & & A' \arrow[dl, "g'"] \\ & B' \arrow[ul, "h'"] & \end{tikzcd},$$

корректно определен и является точным. Здесь $A' = f(A)$, $B' = \ker d_1/\operatorname{Im} d_1$, $f' = f|_A$, g' задается по формуле $g'(f(c)) = [g(c)]$, h' индуцирован h.

б) Пусть в предыдущем пункте модули биградуированны: $A = (A^{p,q})$, $B = (B^{p,q})$. Пусть f, g, h имеют бистепени $(-1, 1), (0, 0), (1, 0)$. Покажите, что бистепень дифференциала d_r в r-ой производной паре равна $(r, 1-r)$.

Date: 25 апреля 2019 г.