ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 2: МНОГООБРАЗИЯ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть X — топологическое n-многообразие, $\mu_x \in H_n(X, X\setminus x)$ — локальная ориентация. Определим

$$\widetilde{X} = \{(x,\mu_x)\colon x\in X,\ \mu_x \in H_n(X, X\setminus x) \text{ — локальная ориентация в точке } x\}.$$

Введите топологию на X и докажите, что $\widetilde{X}$ — ориентируемое многообразие, а проекция $\widetilde{X}\to X$, $(x,\mu_x)\mapsto x$, является двулистным накрытием. Оно называется *ориентирующим накрытием* многообразия X.

2. Докажите, что многообразия S^n, T^n, $\mathbb{C}P^n$ ориентируемы. При каких n ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

3. Определим действие группы $\mathbb{Z}_7$ на S^5 формулой

$$\tau\cdot(z_0,z_1,z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{7}}z_0, e^{\frac{2\pi i\cdot 2}{7}}z_1, e^{\frac{2\pi i\cdot 5}{7}}z_2),$$

где $\tau\in\mathbb{Z}_7$ — образующая группы. Вычислите группы гомологий $S^5/\mathbb{Z}_7$

а) с коэффициентами в $\mathbb{Z}$;

б) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_7$.

4. *Связной суммой* $M\#N$ топологических многообразий M и N одной размерности n называется многообразие, получаемое вырезанием малых открытых шаров из M и N с последующим отождествлением их граничных сфер путём некоторого гомеоморфизма $S^{n-1}\xrightarrow{\cong}S^{n-1}$. Насколько выбор этого гомеоморфизма влияет на топологический тип результата — связной суммы?
Гомеоморфны ли многообразия

а) $S^2\times S^2$ и $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$?

б) $S^2\times S^2$ и $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$, где $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией?

5. Докажите, что если n-мерные многообразия M и N замкнуты и ориентируемы, то $H_i(M\#N) = H_i(M)\oplus H_i(N)$ при $0<i<n$. Как выглядит соответствующая формула в неориентируемом случае?

6. Докажите, что для замкнутых n-мерных многообразий M и N имеет место формула для эйлеровой характеристики $\chi(M\#N) = \chi(M)+\chi(N)-\chi(S^n)$.

7. Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g. Докажите, что отображение $S_g\to S_h$ степени 1 существует тогда и только тогда, когда $g\geqslant h$.

8. Вычислите кольцо когомологий

а) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1=x_3=0$ и $x_2=x_4=0$ в $\mathbb{R}^4$;

б) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1=x_3=0$, $x_2=x_4=0$, $x_3=x_5=0$, $x_4=x_1=0$ и $x_5=x_2=0$ в $\mathbb{R}^5$;

в) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1=z_3=0$ и $z_2=z_4=0$ в $\mathbb{C}^4$;

г)* дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1=z_3=0$, $z_2=z_4=0$, $z_3=z_5=0$, $z_4=z_1=0$ и $z_5=z_2=0$ в $\mathbb{C}^5$.

Date: 21 февраля 2019 г.