ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 3: МНОГООБРАЗИЯ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что если M — связное некомпактное n-мерное многообразие, то $H_i(M) = 0$ при $i \geqslant n$.

2. Докажите следующие свойства, связывающие $\smile$- и $\frown$-произведения:

а) $f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \frown f^*(\varphi))$ для $f\colon X \to Y$, $\alpha \in H_k(X)$, $\varphi \in H^\ell(Y)$;

б) $\alpha \frown (\varphi \smile \psi) = (\alpha \frown \varphi) \frown \psi$ для $\alpha \in H_k(X)$, $\varphi \in H^\ell(X)$, $\psi \in H^m(X)$.

3. Пусть M^m — замкнутое ориентированное многообразие, а $i\colon N^n \hookrightarrow M^m$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия. Пусть $x \in H^{m-n}(M)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $i_*[N] \in H_n(M)$. Докажите, что для любого класса когомологий $y \in H^n(M)$ имеет место формула

$$\langle i^* y, [N] \rangle = \langle x \cdot y, [M] \rangle.$$

4. Докажите, что $H^i_c(X) = \varinjlim H^i(X, X - K)$, где прямой предел берётся по всем гомоморфизмам $H^i(X, X - K) \to H^i(X, X - L)$, соответствующим вложениям компактных подмножеств $K \subset L$ в X.

5. Вычислите $H^i_c(\mathbb{R}^n)$ для всех i.

6. Пусть $X = \bigcup_i U_i$ — бесконечное объединение последовательности открытых подмножеств $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$. Докажите, что $H_k(X) = \varinjlim H_k(U_i)$.

7. Пусть M — компактное n-мерное ориентируемое многообразие с краем ∂M. Докажите *изоморфизмы двойственности Пуанкаре–Лефшеца*

$$D_M = [M] \frown \colon H^k(M, \partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M),$$

$$H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M, \partial M),$$

где $[M] \in H_n(M, \partial M)$ — фундаментальный класс.

8. Докажите, что компактное многообразие не ретрагируется на свой край.

9. Пусть K — компактное подмножество в сфере S^n, причём вложение $K \subset S^n$ является корасслоением, т. е. удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Докажите *изоморфизмы двойственности Александера–Понтрягина*:

$$\widetilde{H}_i(S^n - K) \cong \widetilde{H}^{n-i-1}(K).$$

(Эти изоморфизмы имеют место и без ограничения на вложение, если K — локально стягиваемое компактное подмножество.)

10. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$, отличный от полного симплекса Δ^{m-1}. Определим *двойственный комплекс*

$$\widehat{\mathcal{K}} = \{I \subset [m] \colon [m] \setminus I \notin \mathcal{K}\}.$$

Положим $\widehat{I} = [m] \setminus I$. Для каждого $I \notin \mathcal{K}$ (т. е. $\widehat{I} \in \widehat{\mathcal{K}}$) докажите изоморфизмы

$$\widetilde{H}_j(\mathcal{K}_I) \cong \widetilde{H}^{|I|-3-j}\big(\mathrm{lk}_{\widehat{\mathcal{K}}}\, \widehat{I}\big),$$

где $\mathcal{K}_I = \{J \in \mathcal{K} \colon J \subset I\}$ — ограничение $\mathcal{K}$ на I. В частности, для $I = [m]$ получаем

$$\widetilde{H}_j(\mathcal{K}) \cong \widetilde{H}^{m-3-j}(\widehat{\mathcal{K}}).$$

Это — комбинаторная версия двойственности Александера–Понтрягина.

Date: 28 февраля 2019 г.