ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 4: ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

ЗАМЕНЯЮЩИЙ ЛЕКТОР: Г. Д. СОЛОМАДИН

1. Приведите пример локально тривиального расслоения (E, p, B) со слоем $\mathbb{R}^n$, не являющегося векторным.

2. Даны векторные расслоения ξ, η, γ и непрерывное отображение $f : Y \to X$.

а) Введите топологию и докажите, что векторными являются расслоения $\xi \oplus \eta$, $\xi \otimes \eta$, $\mathscr{H}om\ (\xi, \eta)$, ξ^*, $f^*\xi$;

б) Постройте канонические изоморфизмы $\xi \oplus \eta \simeq \eta \oplus \xi$, $\xi \oplus \eta \simeq \Delta^*(\xi \times \eta)$, где $\Delta : X \to X \times X$ диагональ, $\mathscr{H}om(\xi \oplus \eta, \gamma) \simeq \mathscr{H}om(\xi, \gamma) \oplus \mathscr{H}om(\eta, \gamma)$, $\mathscr{H}om(\xi, \eta) \simeq \xi \otimes \eta^*$.

3. Векторное $\mathbb{C}$-расслоение ξ ранга n послойно задает $\mathbb{R}$-расслоение $\xi_{\mathbb{R}}$ ранга $2n$ (овеществление). Наоборот, векторное $\mathbb{R}$-расслоение η ранга n послойно задает $\mathbb{C}$-расслоение $\xi \otimes \mathbb{C}$ ранга n (комплексификация). Послойно зададим сопряженное действие $\mathbb{C}$ на слоях ξ, получая расслоение $\overline{\xi}$ (сопряжение)

а) Докажите, что векторными являются расслоения $\xi_{\mathbb{R}}$, $\xi \otimes \mathbb{C}$, $\overline{\xi}$;

б) Постройте канонические изоморфизмы $(\eta \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \simeq \eta \oplus \eta$, $\xi_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \simeq \xi \oplus \overline{\xi}$, $\overline{\xi}_{\mathbb{R}} \simeq \xi_{\mathbb{R}}$, $\overline{\xi} \simeq \xi^*$. (Указание: в последнем случае воспользуйтесь ортогональным расслоением и изоморфизмами из 2.)

4. Для *тавтологического расслоения* $\gamma_{n,m} = (E, p, G_n(\mathbb{C}^m))$ над $G_n(\mathbb{C}^m)$ по определению $E = \{(\Pi, v)|\ v \in \Pi\} \subset G_n(\mathbb{C}^m) \times \mathbb{C}^m$, p есть ограничение естественной проекции $G_n(\mathbb{C}^m) \times \mathbb{C}^m \to G_n(\mathbb{C}^m)$.

а) Найдите в терминах стандартных аффинных карт на $\mathbb{C}P^m$ склеивающие коциклы для $\eta = \gamma_{1,m}$;

б)* Проверьте, что $\gamma_{n,m}$ векторное расслоение.

5. На тотальном пространстве $\mathbb{K}$-векторного расслоения (E, B, p) над компактной хаусдорфовой B введите ортогональную или эрмитову метрику при $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, соответственно. (Указание: воспользуйтесь разбиением единицы, подчиненным тривиализующему открытому покрытию B.)

6. Дано $\mathbb{K}$-векторное расслоение $\xi = (E, B, p)$ над компактной хаусдорфовой B $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Обозначим пространство сечений (т.е. множество непрерывных отображений $s : B \to E$ т.ч. $p \circ s = Id$) расслоения ξ над X через $\Gamma(\xi) = \Gamma(\xi, B)$. Рассмотрим непрерывное отображение

$$ev^{\xi} :\ B \times \Gamma(\xi) \to E,\ (x, s) \to s(x).$$

Докажите, что существует *конечномерное* подпространство $V \subset \Gamma(\xi)$ т.ч. ограничение ev^{ξ} на $B \times V$ эпиморфно.

7. Даны склеивающие коциклы $(U_i, g_{j,i})$, $(U_r, h_{s,r})$ векторных расслоений ξ, η и непрерывное отображение $f : Y \to X$. Выразите в этих терминах склеивающие коциклы следующих векторных расслоений: (а) $\xi \oplus \eta$, (б) $\xi \otimes \beta$, (в) $\mathscr{H}om\ (\xi, \eta)$, (г) ξ^*, (д) $f^*\xi$.

Date: 7 марта 2019 г.

8. (*Сцепление векторных расслоений*) Пусть дано конечное покрытие $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^k$ компактного хаусдорфова X, $\mathbb{K}$-векторные расслоения $\xi_i = (E_i, U_i, p_i)$ и изоморфизмы $g_{j,i} : \xi_i|_{U_i \cap U_j} \to \xi_j|_{U_i \cap U_j}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), удовлетворяющие для любых различных i, j, k *соотношению коциклов*

$$g_{k,j} \cdot g_{j,i} = g_{k,i} \tag{1}$$

при ограничении на множество $U_i \cap U_j \cap U_k$. Определите векторное расслоение $\xi = (E, X, p)$ и изоморфизмы $g_i : \xi_i \to \xi|_{U_i}$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \xi_i|_{U_i \cap U_j} \arrow[rr, "g_{ji}"] \arrow[dr, "g_i|_{U_i \cap U_j}"'] & & \xi_j|_{U_i \cap U_j} \arrow[dl, "g_j|_{U_i \cap U_j}"] \\ & \xi|_{U_i \cap U_j} & \end{tikzcd}.$$

Пусть $G = GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. *$G$-коцикл* пространства X задается открытым покрытием (U_i) пространства X и непрерывными отображениями $g_{i,j} : U_i \cap U_j \to G$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), удовлетворяющими (1). Два коцикла $(U_i, g_{i,j})$, $(V_r, h_{r,s})$ называются *эквивалентными*, если заданы непрерывные отображения $g_i^r : U_i \cap V_j \to G$, удовлетворяющие

$$g_j^s(x) \cdot g_{j,i} \cdot g_i^r(x)^{-1} = h_{s,r}(x), \; x \in U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s.$$

9. Проверьте, что это отношение эквивалентности на множестве G-коциклов пространства X.

10. Обозначим множество классов эквивалентности G-коциклов пространства X через $H^1(X; G)$. Постройте биекцию $H^1(X; G) \to Vect_n(X)$, где $Vect_n(X)$ обозначает множество классов изоморфизма векторных расслоений ранга n над X.

11. (*Теорема Свана*) Дано векторное расслоение ξ над компактным хаусдорфовым X. Формула $(f \cdot s)(x) = f(x) \cdot s(x)$ задает на пространстве глобальных сечений $\Gamma(\xi, X)$ структуру модуля над кольцом непрерывных функций $C(X)$ на X. Напомним, что модуль называется проективным, если является прямым слагаемым свободного.

а) Докажите, что $\Gamma(\xi, X)$ проективный $C(X)$-модуль;

б) Докажите, что для тривиальных расслоений ξ, η над X отображение $\Gamma : \mathrm{Hom}(\xi, \eta) \to \mathrm{Hom}_{C(X)}(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$ биективно. Докажите, что Γ эквивалентность из категории тривиальных векторных расслоений в категорию конечно порожденных свободных модулей над $C(X)$;

в) Проверьте, что Γ является эквивалентностью из категории $Vect\ X$ в категорию $PMod_{C(X)}^{fg}$ конечно порожденных проективных модулей над $C(X)$. Докажите, что Γ является эквивалентностью. Указание: перейдите от б) к общему случаю, используя проекцию из тривиального расслоения в ξ.