ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 5: ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите, что на сфере S^{2n+1} существует векторное поле без нулей.

2. Докажите, что на сфере S^{11} существуют три линейно независимых векторных поля без нулей.

3. Докажите, что сфера S^{2n} не параллелизуема при $n \geqslant 1$.

4. Пусть ξ, γ — комплексные векторные расслоения над клеточным пространством X, причём γ одномерно. Докажите, что расслоения $\mathbb{C}P(\xi \otimes \gamma)$ и $\mathbb{C}P(\xi)$ изоморфны. То же для вещественных векторных расслоений и проективизаций.

5. Опишите функции склейки для одномерного расслоения $\gamma^{\otimes k}$ над $\mathbb{C}P^n$, где γ — тавтологическое расслоение, $k \in \mathbb{Z}$, и при отрицательных k подразумевается тензорная степень расслоения $\overline{\gamma} \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}})$. Начните со случая $\mathbb{C}P^1$.

6. Докажите, что $\mathcal{T} Gr(k, N) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^{\perp})$, где γ есть k-мерное тавтологическое расслоение над (вещественным или комплексным) грассманианом $Gr(k, N)$, а $\gamma^{\perp}$ есть $(N-k)$-мерное расслоение ортогональных плоскостей.

7. Рассмотрим отображение $q\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \cong S^{2n}$. Докажите, что $q^*\alpha = v^n$, где $\alpha \in H^{2n}(S^{2n})$ — стандартная образующая, происходящая из ориентации $\mathbb{C}P^n$, а $v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $[\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$.

8.

а) Приведите пример локально тривиального расслоения $F \to E \to B$, для которого не выполнено второе из условий теоремы Лере–Хирша (т. е. $H^*(F; R)$ является конечно порождённым свободным R-модулем, но не существует набора классов в $H^*(E; R)$, которые ограничиваются на базис в когомологиях каждого слоя).

б) Приведите пример локально тривиального расслоения $F \to E \to B$, для которого выполнены условия теоремы Лере–Хирша, но отсутствует изоморфизм колец $H^*(E; R) \cong H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)$.

9. Докажите изоморфизмы колец

$$H^*(U(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_1, u_2, \dots, u_n], \quad \dim u_i = 2i - 1,$$
$$H^*(SU(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_2, \dots, u_n], \quad \dim u_i = 2i - 1$$

(справа стоят внешние алгебры от нечётномерных образующих). *Указание:* используйте расслоение $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$ и теорему Лере–Хирша. Что можно сказать про когомологии группы $O(n)$, используя тот же метод?

Date: 14 марта 2019 г.