

**ТОПОЛОГИЯ–3**  
**ЛИСТОК 6: ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ЧЖЕНЯ**

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Вычислите полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия  $\mathbb{C}P^n$ .

2.

- а) Вычислите кольцо когомологий многообразия  $L(n, m) = \mathbb{C}P(\eta \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)$ , где  $\eta$  — тавтологическое одномерное расслоение над  $\mathbb{C}P^n$ , а  $\underline{\mathbb{C}}^m$  — тривиальное  $m$ -мерное расслоение над  $\mathbb{C}P^n$ .
- б) Вычислите кольцо когомологий многообразия  $\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1} \oplus \dots \oplus \eta^{\otimes i_k})$  для произвольных целых чисел  $i_1, \dots, i_k$ .
- в)\* Вычислите полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия  $\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1} \oplus \dots \oplus \eta^{\otimes i_k})$ .

3. Пусть  $0 \leq k \leq l$  — натуральные числа. Определим *многообразие Милнора*

$$H_{kl} = \{([z_0 : \dots : z_k], [w_0 : \dots : w_l]) \in \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l : z_0 w_0 + \dots + z_k w_k = 0\}.$$

а) Докажите, что  $H_{ij}$  является сечением образа *вложения Серге*

$$\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \hookrightarrow \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1},$$

$$([z_0 : \dots : z_k], [w_0 : \dots : w_l]) \mapsto [z_0 w_0 : \dots : z_i w_j : \dots : z_k w_l]$$

гиперплоскостью  $H \subset \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1}$  общего положения.

б) Вычислите кольцо когомологий многообразия  $H_{ij}$ .

4. Докажите, что структурную группу комплексного  $n$ -мерного расслоения  $\xi$  можно редуцировать к  $SU(n)$  тогда и только тогда, когда  $c_1(\xi) = 0$ . *Указание:* редукция структурной группы соответствует поднятию классифицирующего отображения в  $BU(n)$  до отображения в  $BSU(n)$ .

5. Пусть  $\xi$  —  $m$ -мерное, а  $\eta$  —  $n$ -мерное комплексные расслоения. Пользуясь принципом расщепления, выразите классы Чженя  $c_1(\xi \otimes \eta)$ ,  $c_2(\xi \otimes \eta)$ ,  $c_1(S^2\xi)$ ,  $c_2(S^2\xi)$ ,  $c_1(\Lambda^2\xi)$ ,  $c_2(\Lambda^2\xi)$  через классы Чженя расслоений  $\xi$  и  $\eta$ . Здесь  $S^i\xi$  обозначает  $i$ -симметрическую степень расслоения  $\xi$ , а  $\Lambda^i\xi$  обозначает  $i$ -ю внешнюю степень.

6. Запишем  $c_i(\xi) = \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i$ -я симметрическая функция формальных переменных). Докажите, что полные классы Чженя симметрической и внешней степени расслоения  $\xi$  выражаются по формулам

$$c(\Lambda^k\xi) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (1 + (x_{i_1} + \dots + x_{i_k})), \quad c(S^k\xi) = \prod_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} (1 + (x_{i_1} + \dots + x_{i_k})).$$

7. Пусть  $\xi$  — комплексное  $n$ -мерное расслоение над  $X$  и пусть  $p: Fl(\xi) \rightarrow X$  — флагизация расслоения  $\xi$ . Докажите, что индуцированное  $p^*(\xi)$  над  $Fl(\xi)$  распадается в сумму одномерных  $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ . Опишите ограничение каждого расслоения  $\gamma_i$  на слой  $Fl(\mathbb{C}^n) \subset Fl(\xi)$  в терминах пространств, входящих во флаги.

8. Докажите, что числа Бетти (ранги групп целочисленных гомологий) многообразия флагов  $F = Fl(\mathbb{C}^n)$  удовлетворяют соотношениям  $\beta_{2i+1}(F) = 0$  и

$$\sum_i \beta_{2i}(F) t^{2i} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + t^2 + \dots + t^{2i}).$$