ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 7: ГРАССМАНИАНЫ И МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Задайте в явном виде образующими и соотношениями кольца целочисленных когомологий грассманианов $G_2(\mathbb{C}^4)$, $G_2(\mathbb{C}^5)$, $G_3(\mathbb{C}^5)$.

2. Пусть P — матрица размера $k \times N$. Обозначим через $p_{i_1,\dots,i_k}$ минор, составленный из столбцов $i_1, \dots, i_k$. Докажите *соотношения Плюккера*

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r \, p_{i_1,\dots,i_{k-1},j_r} \, p_{j_1,\dots,\widehat{j_r},\dots,j_{r+1}} = 0$$

для любых наборов различных индексов $(i_1, \dots, i_{k-1})$ и $j_1, \dots, j_{k+1}$.

3. Для каждого набора $s = (s_1, \dots, s_k)$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < \dots < s_k \leqslant N$ рассмотрим следующее подмножество в вещественном грассманиане:

$$e(s) = \{\pi \in G_k(\mathbb{R}^N)\colon \dim(\pi \cap \mathbb{R}^{s_i}) = i, \ \dim(\pi \cap \mathbb{R}^{s_i - 1}) = i - 1 \quad \text{для } i = 1, \dots, k\}.$$

а) Убедитесь, что $e(s) \cap e(s') = \varnothing$ при $s \neq s'$ и $G_k(\mathbb{R}^n) = \bigcup_s e(s)$.

б) Докажите, что $e(s)$ гомеоморфно открытому шару размерности $(s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \dots + (s_k - k)$.

б) Докажите, что $\overline{e(s)} \subset \bigcup_{t<s} e(t)$, где $t = (t_1, \dots, t_k) \leqslant s = (s_1, \dots, s_k)$, если $t_i \leqslant s_i$ при $i = 1, \dots, k$.

Отсюда следует, что $G_k(\mathbb{R}^n) = \bigcup_s e(s)$ — клеточное разбиение. Подмножества $e(s)$ называются *клетками Шуберта*, а их замыкания $\overline{e(s)}$ — *многообразиями Шуберта*. Для комплексного грассманиана $G_k(\mathbb{C}^N)$ то же верно с удвоением размерностей.

4. Докажите, что гомоморфизм $H^*(BU(n)) \to H^*(BT^n)$, индуцированный классифицирующим отображением $(\mathbb{C}P^\infty)^n = BT^n \to BU(n)$ произведения n тавтологических расслоений над $\mathbb{C}P^\infty$, переводит $H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$ в подкольцо симметрических многочленов $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \subset \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] = H^*(BT^n)$, где $\deg t_i = 2$, а σ_i есть i-я элементарная симметрическая функция от $t_1, \dots, t_n$.

5. Докажите, что кольцо когомологий многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ описывается следующим образом:

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]/(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

6. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение. Докажите, что если $w(\xi) \neq 1$, то число $\min\{i\colon w_i(\xi) \neq 0\}$ есть степень двойки.

7. Докажите, что для комплексного расслоения ξ число $\min\{i\colon c_i(\xi) \neq 0\}$ может быть любым.

8. Пусть η — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Докажите, что не существует векторного расслоения ζ над $\mathbb{R}P^\infty$ такого, что $\eta \oplus \zeta$ тривиально.

9. Докажите, что если многообразие M^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$, то каждый класс $w_i(M)$ является степенью класса $w_1(M)$.

Date: 28 марта 2019 г.