Лекция $k+1$.

Вычеты

Что такое вычет изолированной особой точки - интеграл формы $\frac{1}{2\pi i}f(z)dz$ по замкнутому пути один раз обходящему вокруг особой точки в положительную сторону. Покажите, что вычет равен коэффициенту

$$a_{-1}$$

ряда Лорана. (Все остальные члены дают нулевой вклад в интеграл). Вычет точки z_0 обозначим как

$$Res(f, z_0).$$

Теорема о вычетах.

Пусть f голоморфна в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ за исключением изолированных особенностей. Пусть $K \subset U$ – компакт с достаточно хорошей границей Γ и пусть Γ не задевает особенности функции f. Тогда число особых точек в K конечно и

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f, z_k).$$

Как доказать эту теорему – окружить каждую изолированную особенность достаточно малой окружностью и выбросить из K открытые круги U_i, ограниченные этими окружностями. Достаточность малости тут состоит в том, что все эти круги лежат в K и не пересекаются. Интеграл по ориентированной границе $K \setminus \cup U_i$ от формы $f(z)dz$ равен нулю с одной стороны, а с другой стороны этот интеграл равен $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz - 2\pi i \sum Res(f, z_k)$.

Вычет в бесконечности.

Вычет удобно определять для 1-формы на комплексном одномерном многообразии. Окружили особенность окружностью, ориентировали ее в положительную сторону, и проинтегрировали форму. Можно скрыть, что мы знаем что такое многообразие и действовать так :

Для определения вычета в бесконечности сделаем замену $z = 1/w$, получим

$$f(z)dz = -\frac{1}{w^2}f(\frac{1}{w})dw$$

и по определению положим вычет в бесконечности равным вычету в нуле формы $-\frac{1}{w^2}f(\frac{1}{w})dw$.

Покажите, что теорема о вычетах справедлива и в сфере Римана. В частности, если наше множество U есть вся сфера, то у нее нет границы и левая часть равенства обнуляется

$$0 = \sum Res(f, z_k).$$

Сумма всех (конечно включая вычет в бесконечности) вычетов функции с изолированными полюсами равна нулю.

Теорема о вычетах поможет нам считать много определенных интегралов. Сначала надо научиться считать вычеты. Лучше всего это (учиться) делать на частных примерах. Если $f = \frac{p}{q}$ и нуль z_0 фунции q прост, как часто бывает, то вычет функции f в особой точке z_0 равен

$$\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

.

До перехода к вычислению интегралов типа

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)dx}{x^4+1}$$

сделаем простое, красивое и важное вычисление. Логарифмической производной фунции f называют выражение

$$\frac{f'}{f}$$

совпадающее с производной композиции логарифма и функции f для вещественных функций (там где они положительны). В комплексной области логарифм многозначен, а вот его производная однозначна (подумайте почему). И производная функции $\ln(f)$ задается приведенной формулой. Где будут особые точки логарифмической производной мероморфной функции? там где у самой функции нули и полюса. Проверьте что в нулях функции f кратности k вычет логарифмической производной как раз равен k, а в полюсах кратности k равен $-k$.

Поэтому для мероморфной функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = Z - P$$

где Γ ориентированная граница достаточно хорошего компакта как и раньше.

Посмотрим на интеграл по Γ логарифмической производной функции $f(z) - a$. Этот интеграл определен когда a не является значением функции f на Γ. Он равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)-a} = Z(a) - P,$$

где $Z(a)$ есть число решений уравнения $f(z) = a$ с кратностями, лежащих во внутренности компакта, а число полюсов у функции $f - a$ совпадает (с кратностями и при любом значении a) совпадает с этим числом P для f и сами полюса совпадают.

Если a непрерывно меняется и не пересекает при этом $f(\Gamma)$ то этот интеграл непрерывен, поскольку подинтегральная функция непрерывна. С другой стороны он есть целое число. Следовательно, он просто постоянен.

Точка x_0 является кратной для f кратности k если ряд Тейлора для $f - f(x_0)$ с центром в x_0 начинается с ненулевого члена степени k. Как мы видели, это значит что можно так голоморфно изменить параметр $x - x_0 = h(w)$, что в окрестности нуля голоморфная непостоянная функция превратится просто в w^k. Поэтому, точки кратности два и больше для непостоянно встречаются редко – они изолированы (докажите). И покажите, что множество решений уравнения $f(x) = a$ зависит от a непрерывно в топологии Хаусдорфа пока $a \in \mathbb{C} \setminus f(\Gamma)$.

Эта замечательная формула связана с теорией степени отображения. Пусть есть ориентированное компактное многообразие M^n с краем ∂M^n и его (бесконечно) гладкое отображение F в ориентированное многообразие N^n той же размерности n. Значение (точка в N^n) называется неособым, если во всех его прообразах дифференциал $d(F)$ имеет максимальный ранг n. С помощью ориентаций каждому прообразу неособого значения сопоставляется число – $+1$ если определитель $d(F)$ положительный и -1 если определитель $d(F)$ отрицательный. У неособого значения a)

(не лежащего в $F(\partial M)$) определяется степень $\deg(F, a)$, как сумма построенных ± 1 по прообразам точки a (докажите, что эта сумма конечна тут и нужна компактность и то, что a не лежит в $F(\partial M)$), потом определяется степень для особого значения a (тоже не лежащего в $F(\partial M)$): по теореме Сарда особые значения имеют меру ноль, так что можно взять близкое неособое значение b и подсчитать в нем степень $\deg(F, b)$. Результат не зависит от шевеления b (это теорема, конечно), что позволяет определить $\deg(F, a)$ и для особых значений, не лежащих в $F(\partial M)$.

Рассмотрим наше отображение f как отображение многообразия с краем K в сферу Римана. Тогда все знаки, участвующие в определении степени положительны, такое преимущество у голоморфности! (докажите это) и интеграл от $\frac{1}{2\pi i} f'/f$ есть степень, посчитанная для нуля, минус степень посчитанная для бесконечности.

Интегралы и вычеты.

Мы рассмотим разные интегралы, в вычислении которых основную роль играет теорема о вычетах. Вторичную и часто совсем непростую роль играет выбор контура (так, классически принято называть путь интегрирования на комплексном одномерном (в нашем случае) многообразии) интегрирования — у исходного интеграла он не является границей, также иногда приходится интегрировать не совсем исходную функцию.

1. Рассмотрим интеграл рациональной функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

P, Q – многочлены. Мы будем считать, что у P и Q нет общих корней. Чтобы этот интеграл сходился необходимо и достаточно чтобы у многочлена Q не было действительных корней и выполнялось неравенство

$$\deg P + 1 < \deg Q.$$

Классически принято с этим интегралом поступать так. Рассмотрим

$$\int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

и замкнем этот отрезок полуокружностью γ_R, лежащую в верхней полуплоскости. Ориентируем этот контур как границу полудиска. При большом R все полюса лежащие в верхней полуплоскости попадут внутрь полудиска. Интеграл по его диаметру стремится к искомому значению. Покажем, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0.$$

Из этого сразу следует, что искомый интеграл равен

$$2\pi i\sum Res(\frac{P}{Q},z_k)$$

где суммирование распространено на все полюса лежащие в верхней полуплоскости. Интеграл по полуокружности

$$\int\limits_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

равен интегралу

$$\int\limits_0^\pi\frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})}Re^{i\varphi}id\varphi$$

и его модуль оценивается так:

$$|\int\limits_0^\pi\frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})}Re^{i\varphi}id\varphi|\le\int\limits_0^\pi|\frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})}Re^{i\varphi}i|d\varphi\le\int\limits_0^\pi\frac{C}{R^2}Rd\varphi=C\pi/R,$$

для подходящей положительной константы C. Если мы замкнем полуокружностью в нижней полуплоскости, то наш интеграл окажется равен

$$-2\pi i\sum Res(\frac{P}{Q},z_k)$$

где суммирование распространено на все полюса лежащие в нижней полуплоскости (почему минус?).

Для этого интеграла можно было не переходить к пределу, а рассмотреть нашу форму на сфере Римана и доказать (как?) что она продолжается голоморфно (а не мероморфно) в бесконечность. Так что, добавив к исходному контуру $\mathbb{R}$ одну точку ∞, получим замечательный компактный контур – границу полусферы, по которой надо проинтегрировать форму без особенностей на этой границе.

Мы рассмотрим разные другие интегралы в следующий раз.