Лекция $k+5$.

Поговорим немного о комплексных многообразиях и только одномерных (больше мы не успеем). Надеюсь, что само понятие многообразия уже известно (а если нет, то самое время его узнать, или можно перейти чуть вперед). Мы имели дело пока с комплексной прямой, иногда с проколотой в нескольких точках комплексной прямой, диском. Сейчас мы немного продвинемся вперед. Отметим, для начала, что комплексное многообразие, рассматриваемое как вещественное многообразие, ориентируемо (докажите это простое утверждение) – ленту Мебиуса, бутылку Клейна, проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ не встретить среди комплексных многоообразий. Сегодня выглядит достаточно естественным ограничение, накладываемое при первом знакомстве с комплексными многообразиями, – компактность, многообразия для начала изучают замкнутые (компактные и без края). Компактные вещественные ориентируемые многообразия топологически (с точностью до гомеоморфизма) и даже гладко (с точностью до диффеоморфизма) характеризуются одним целым неотрицательным параметром – числом ручек, он же называется родом. Бывает сфера, тор, крендель... – сфера с g ручками. Если мы изучаем мир комплексных многообразий, то ситуация драматически меняется – только многообразия рода ноль, сферы, одинаковы и этот факт является непростой теоремой, которую мы не будем доказывать – уже для многообразий рода 1 это совсем не так: если вы возьмете два случайных комплексных тора, то они кажутся разными комплексными многообразиями.

Нас интересуют функции на многообразиях. (Локально) голоморфные функции это функции (отображения в $\mathbb{C}$) диффенцируемые на своей области определения. Кажется естественным изучать дифференцируемые функции на многообразии. На замкнутом связном многообразии такие функции очень удобно изучать, потому что других голоморфных функций кроме констант там нет – на компактном многообразии достигается максимум модуля непрерывной функции, в окрестности которого, а значит и везде, функция постоянна. Мы будем (увы, совсем немного) изучать голоморфные отображения в сферу Римана $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Иначе говоря, такое отображение есть самая настоящая голоморфная функция f (отображения в $\mathbb{C}$) на $M \setminus \{z_1, .., z_n\}$ (эти точки и их число разные для разных функций), причем в каждой точке z_k у f есть предел и равен бесконечности (то есть существенные особенности запрещены). Напомню, что рациональные функции на сфере Римана описываются очень просто (подумайте еще раз почему) – это только рациональные функции в $\mathbb{C}$.

Функция Вейерштрасса

Рассмотрим в $\mathbb{C}$ (как в группе по сложению) двумерную решетку Λ у которой есть два образующих, два числа α и β

$$\Lambda = \{m\alpha + k\beta | m, k \in \mathbb{Z}\}$$

. Эти образующие, конечно, не единственны. Фактор $\mathbb{C}/\Lambda$ это одномерное комплексное многообразие рода 1, тор. Функции на этом торе это так называемые двояко-периодические функции (два от размерности решетки), их можно поднять на $\mathbb{C}$, где они превращаются в мероморфные функции удовлетворяющие условию периодичности $f(z+\omega) = f(z)$ для всех $\omega \in \Lambda$. Пока что мы не знаем, есть ли такая функция.

Отметим, что функции с одним полюсом первого порядка нет - если бы такая функция была, то ее степень равнялась бы единице и тор оказался бы диффеоморфен сфере. Мы сейчас построим функцию с одним полюсом второго порядка. Строится она так: надо рассмотреть такой ряд

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

Докажем, что этот ряд равномерно сходится на любом компакте, не содержащем полюсов. В самом деле

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \frac{|z(2-\frac{z}{\omega})|}{|\omega|^3 |1-\frac{z}{\omega}|^2}.$$

Следовательно, с точностью до “первых членов” ряд (при z в заданном компакте, например в фиксированном круге с центром в нуле и радиусом r) мажорируется рядом $\sum \frac{C}{|\omega|^3}$ для некоторой постоянной C, укажите такую константу явно. Этот ряд сходится - докажите. Итак, мы построили на плоскости функцию $\wp$, называющуюся функцией Вейерштрасса (конечно, она зависит от решетки Λ). Что мы о ней знаем: что в маленькой окрестности точки $\omega \in \Lambda$ она есть $\frac{1}{(z-\omega)^2}$ с точностью до голоморфной. Докажите, что функция Вейерштрасса четна $\wp(-z) = \wp(z)$.

Докажем, что $\wp$ двояко-периодична. Делается это так. Как мы уже знаем, ряд можно почленно дифференцировать и получившийся ряд сойдется к производной суммы исходного ряда. Поэтому производная

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^3}$$

и, очевидно (в отличие от $\wp$), двояко-периодична. Рассмотрим функцию $\wp(z+\alpha)-\wp(z)$. Производная этой функции всюду вне полюсов, где она не определена, равна нулю. Следовательно (почему?), сама функция равна константе. Посмотрим на значение этой функции в точке $-\frac{\alpha}{2}$ – это значение равно $\wp(\frac{\alpha}{2}) - \wp(-\frac{\alpha}{2})$. Следовательно, это значение равно нулю и α является периодом. Точно также β является периодом и потому наша функция $\wp$ двояко-периодична.

Такая функция (на торе с одним полюсом второго порядка в нуле и нулевым вычетом), с точностью до умножения на число и прибавления константы, одна, потому что если вычесть подходящую пропорциональную $\wp$ функцию, то останется голоморфная функция которая обязательно постоянна по принципу макисмума. Отметим, что вычет обязательно нулевой, так как иначе после вычета отмасштабированной функции (и может быть сдвинутой) Вейерштрасса осталась б функция, осуществляющая биголоморфное отображение на сферу.

Ряды Лорана для функции Вейерштрасса и ее производной

У нас есть две рациональные функции $\wp$ и $\wp'$ на торе (есть и другие – $\wp''$, например, но эти первые встреченные нами). Сейчас мы поймем как они алгебраически связаны. Для этого мы, как и выше, возьмем рациональную функцию, и вычтем из нее другие функции так чтобы уничтожить все полюса, в итоге (на компактном многообразии) останется константа.

Чтобы реализовать этот план изучим, как функция Вейерштрасса и ее производная разлагается в ряд Лорана в нуле. Имеем:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + ..,$$

поскольку $\wp$ четная, коэффициенты при членах нечетной степени равны нулю. Коэффициенты при четных членах (нам понадобятся первые три, один из которых – самый первый – мы знаем) ищутся так – дифференцируем почленно ряд и смотрим значение в нуле (поделив на нужный факториал). Отсюда (проверьте)

$$a_2 = 3\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^4},\quad a_4 = 3\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^6}.$$

Пользуясь разложением для $\wp$, выпишем разложение для $(\wp')^2$:

$$(\wp')^2(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + ..,$$

и будем убивать в нем полюс в нуле. Для этого сначала отнимем произведение 4 и $\wp^3$, останется

$$(\wp')^2(z) - 4\wp^3(z) = \frac{20a_2}{z^2} - 28a_4 + ...$$

(кстати, чудесным образом пропал член четвертого порядка – попробуйте найти геометрическое объяснение этому). Следовательно, у двоякопериодической функции

$$(\wp')^2 - 4\wp^3 - 20a_2\wp + 28a_4$$

нет полюса в нуле и следовательно его нет и в других точках решетки. В остальных точках функция $(\wp')^2 - 4\wp^3 - 20a_2\wp + 28a_4$ априори голоморфна и ее значение в нуле равно нулю, следовательно и она сама тождественно равна нулю. Значит, образ тора $\mathbb{C}/\Lambda$ при отображении $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)) = (x, y)$ лежит на кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$y^2 = 4x^3 + 20a_2x - 28a_4.$$

Покажем, что каждая точка (x, y) этой кривой лежит в образе отображения $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$. Действительно, степень функции $\wp : \mathbb{C}/\Lambda \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ равна двум. У каждой точки есть два (с учетом кратностей) прообраза, поскольку у бесконечности есть ровно один двукратный прообраз – ноль (у функции $\wp$ ровно один с точностью до периодов двукратный полюс в нуле). Рассмотрим решение z уравнения $\wp(z) = x$. Вспомним, что функция Вейерштрасса четная – следовательно, $-z$ тоже решение этого уравнения. Если (x, y) лежит на кривой $y^2 = 4x^3 + 20a_2x - 28a_4$ то y есть одно из двух противоположных чисел $\wp'(z)$ и $\wp'(-z)$. Чуть более тонкое рассуждение (попробуйте найти его) докажет, что каждая точка кривой есть образ ровно одной точки при отображении $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$. Кроме того, производная этой параметризации всюду ненулевая.

Закончим несколькими замечаниями общего характера. Очень важны голоморфные формы (то есть в локальной комплексной координате, имеющие вид $h(z)dz$), которые образуют комплексное векторное пространство. Оказывается, на компактных без края одномерных комплексных многообразиях рода g это пространство g-мерно, изоморфно $\mathbb{C}^g$. Это важная теорема, которую мы не будем доказывать. На сфере Римана голоморфных форм, кроме нулевой, нет (докажите), а на торе $\mathbb{C}/\Lambda$ такая форма одна – dz – с точностью до умножения на константу (докажите).

Пусть есть голоморфное непостоянное отображение $f\colon M_1 \to M_2$ одного замкнутого связного комплексного многообразия в другое. Определим след $\mathrm{Tr}(\omega)$ голоморфной формы ω при этом отображении следующим образом. Рассмотрим регулярное значение отображения f, критических значений конечное число (докажите). У любой достаточно малой связной окрестности U этого значения есть ровно k непересекающихся связных открытых подмножеств $U_1, .., U_k$ в M_1 (k – степень отображения f) таких что $f|_{U_i}$ есть биголоморфное отображение U_i на U. На каждой окрестности U_i есть голоморфная форма $\omega|_{U_i}$. Перенесем ее на U при помощи $((f|_{U_i})^{-1})^*$ и получим на U k штук форм $((f|_{U_i})^{-1})^*\omega$. Если сложить все эти формы, то получится форма, которую и называют следом $\mathrm{Tr}(\omega)$ формы ω (на U). Ясно, что результат $\mathrm{Tr}(\omega)(x)$ в самом регулярном значении x (с которого мы начали рассказ) не зависит от выбираемой достаточно малой окрестности U. Таким образом, на множестве регулярных значений $M_2 \setminus \{x_1, .., x_n\}$ возникает голоморфная форма $\mathrm{Tr}(\omega)$. Удивительный на первый взгляд результат состоит в том (теорема Абеля), что эта форма голоморфно продолжается в точки $x_1, .., x_n$. Если критическая точка лежала на границе окрестности U, то форма $((f|_{U_i})^{-1})^*\omega$ не ограничена (попробуйте придать этому высказыванию точный смысл), но когда мы эти формы сложим, то “бесконечности сократятся”. Докажите эту теорему.

В заключение расскажу еще, как считать род общей кривой степени n в $\mathbb{C}P^2$ не особенно заботясь о строгости. Рассмотрим общий однородный многочлен f степени n от трех переменных с комплексными коэффициентами (мы не вдаваемся в подробности, объясняя что значит общий, синоним – случайный). Этот многочлен задает коническое множество решений $f(x, y, z) = 0$, которое естественно проецируется в комплекную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$. Множество $f(x, y, z) = 0$ комплексно двумерное, его проекция в $\mathbb{C}P^2$ одномерна,обозначим ее L_0. Для общего многочлена это множество есть гладкое многообразие, которое называется кривой (вещественно оно двумерно). Если многочлен был первой степени $ax + by + cz$ и ненулевой, то получится кривая диффеоморфная двумерной сфере – одномерному комплексному проективному пространству – это легко усмотреть непосредственно. Если второй степени, то общая кривая тоже сфера (мы это не доказываем, но скоро проясним), а необщая бывает две пересекающихся прямых (пример многочлена – xy) или одна прямая (на самом деле она кратная, пример многочлена – x^2). Вообще говоря (и это на самом деле проявление нескольких важных теорем), род общей кривой степени n зависит только от n, все такие кривые диффеоморфны (именно вещественно диффеоморфны, как комплексные многообразия они скорее всего разные). При исключительных значениях коэффициентов, имеющих вещественную коразмерность два в пространстве многочленов, наша кривая становится не диффеоморфной общей кривой. Чтобы понять как топологически устроена общая кривая надо ее рассмотреть там (то есть при таких значениях коэффициентов многочлена), где ее "удобно рассмотреть". Оказывается, это хорошо делать "рядом" с многочленом, который есть произведение n общих многочленов первого порядка, $f = l_1 l_2 .. l_n$. Этот многочлен не общий, кривая $f = 0$ особая, но очень легко описываемая – это объединение n (комплексных проективных) прямых. Мы считаем, что эти прямые находятся в общем положении, то есть никакие две не совпадают и никакая прямая не проходит через точку пересечения других двух. Это множество является гладким многообразием всюду вне точек пересечения этих прямых, этих точек $1 + 2 + .. + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, в каждой из них пересекаются две комплексные прямые. Пошевелим теперь чуть-чуть эту кривую так чтоб она стала неособой – вместо $f = 0$ превратим ее в $f_\varepsilon = 0$, которую мы обозначим L_ε. При этом каждая особая точка разрушится так как разрушается кривая $xy = 0$ на комплексной плоскости с координатами (x, y), превращаясь в $xy = \varepsilon$ (я опять не пытаюсь сказать более точно). Рассмотрим шары (четырехмерные) U_k вокруг каждой точки. Эйлерова характеристика дополнения $L \setminus \cup U_k$ равна $n(3-n)$ – как у n копий двумерной сферы с $n-1$ дыркой ($n \geqslant 2$). С другой стороны она равна эйлеровой характеристике $L_\varepsilon \setminus \cup U_k$ (особые точки у L находятся как раз в этих шарах U_k), а в каждом шаре нужно заклеить две окружности цилиндром (подумайте почему, это очень важный момент доказательства), операция добавления цилиндра (эйлерова характеристика которого равна нулю) не меняет эйлеровой характеристики. Получаем

$$n(3-n) = 2 - 2g.$$

Следовательно, род g дается формулой

$$g = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}.$$

Мы подошли к порогу комплексного мира, за которым масса интересных сюжетов и теорем. Надеюсь, вы перешагнете этот порог и много интересного еще (и скоро) узнаете. Я бы на вашем месте прочел бы книгу Дональдсона 'Riemann Surfaces', дальше (или параллельно) читал бы Гриффитса и Харриса "Принципы алгебраической геометрии". Этот совет совсем не претендует на уникальность, есть еще много способов войти в мир комплексных многообразий итп - вот сразу хочется посоветовать книжку Милнора "Особые точки комплексных гиперповерхностей” и всякие другие. Кроме этого очень полезно слушать какой-нибудь курс, который вы наверняка найдете.