Лекция $k+2$.

Интегралы при помощи вычетов

Мы продолжаем обсуждать интегралы, следующий "тип" 2. Интеграл

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$$

для рациональной функции R без полюсов на окружности $x^2+y^2 = 1$. Запараметризуем окружность при помощи комплексной экспоненты. Получим, что наш интеграл равен интегралу от рациональной функции

$$Q(z) = (1/iz)R(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$$

по единичной окружности в комплексной прямой. А этот интеграл равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов Q по всем полюсам в единичном круге. Вычислите, например, интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-\cos x}.$$

3. Следующий часто встречающийся тип интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx,$$

отметим сразу, что часто встречается его действительная или мнимая часть. Пусть f определена в верхней полуплоскости без конечного множества точек и голоморфна там (пусть на действительной оси нет особенностей). Рассмотрим такой контур – граница полукруга, ориентированная в положительную сторону: полуокружность (окружности радиуса r с центром в нуле) $S(r)$ в верхней полуплоскости и отрезок вещественной оси $[-r, r]$. И мы хотим, чтобы при росте r интеграл от $f(z)e^{iz}dz$ по полуокружности $S(r)$ стремился к нулю. Докажем, что это так если

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ (стремление к бесконечности только по верхней полуплоскости). Имеем:

$$\int\limits_{S(r)} f(z)e^{iz}dz=\int\limits_0^\pi f(re^{it})e^{ire^{it}}de^{it}.$$

А модуль интеграла соответственно оценивается так:

$$\Big|\int\limits_{S(r)} f(z)e^{iz}dz\Big|\leqslant\int\limits_0^\pi\Big|f(re^{it})e^{ire^{it}}ire^{it}\Big|dt=\int\limits_0^\pi\Big|f(re^{it})e^{ire^{it}}r\Big|dt=$$

$$=\int\limits_0^\pi\Big|f(re^{it})\Big|\Big|e^{ir(\cos t+i\sin t)}\Big|rdt\leqslant\int\limits_0^\pi M(r)e^{r(-\sin t)}rdt.$$

Тут $M(r)$ это максимум модуля фунции f по полуокружности $S(r)$. Покажем, что интеграл $\int\limits_0^\pi e^{-r\sin t}rdt$ оценивается сверху независящей от r константой. Делается это, скажем, так:

$$\int\limits_0^\pi e^{-r\sin t}rdt=2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}rdt\leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-rt/4}rdt,$$

так как $\sin t\geqslant t/4$ на $[0,\pi/2]$ (тут можно взять хоть $t/100$ вместо $t/4$). Последний интеграл можно явно взять:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-rt/4}rdt=-4e^{-rt/4}\Big|_{t=0}^{t=\pi/2},$$

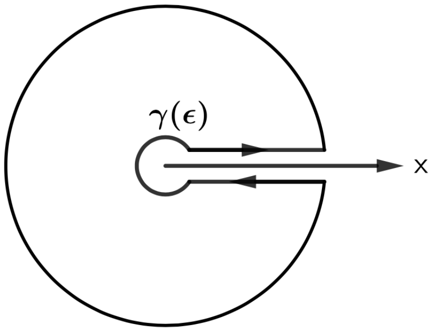
в нем сокращается “большой” множитель r и он уже не больше четырех. Таким образом, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ сходится, то он равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов $f(z)$ в верхней полуплоскости. Возьмите интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{1+x^2}.$$

4. Сейчас мы обсудим интеграл вида:

$$\int\limits_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}dx,$$

пусть R рациональная функция, стремящаяся к нулю в бесконечности, не имеющая особенностей на действительной оси, а число α находится между нулем и единицей. Из этих условий вытекает, что интеграл сходится. Для вычисления этого интеграла рассмотрим контур, схематично изображенный (отрезки проходящие дважды можно считать геометрически совпадающими) на рисунке.



Интегралы по большой $\gamma(r)$ и маленькой $\gamma(\varepsilon)$ окружности стремятся к нулю (докажите). Интеграл по отрезку $[\varepsilon, r]$ встречается в интеграле по всему контуру дважды — один раз мы идем в сторону возрастания $|z|$ и интегрируем $\frac{R(x)}{x^\alpha}$, второй раз мы идем в противоположную сторону, но и интегрируем другую непрерывную ветвь $\frac{R(x)}{x^\alpha}$, поскольку сделали один оборот в положительную сторону вокруг нуля. z^α умножается на $e^{2\pi i\alpha}$ при повороте вокруг нуля на $+2\pi$. Значит

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum res(\frac{R(x)}{x^\alpha}).$$

Один минус из-за противоположного направления в интеграле, второй из-за деления на z^α. Найдите

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

5. Следующий интеграл

$$\int_0^\infty R(x) \ln x dx.$$

Где функция R рациональна и пусть она не имеет особенностей на луче интегрирования. Чтобы интеграл сходился потребуем, чтобы $\lim\limits_{z\to\infty} zR(z) = 0$ (почему такое условие?). Если мы опять рассмотрим тот же контур, что и выше, и будем интегрировать $R(z)\ln z dz$, то часть с логарифмическим множителем сократится и нужный интеграл не получится вычислить (а получится вычислить другой интеграл – какой и как?). Поэтому надо интегрировать форму $R(z)\ln^2 z dz$ по этому контуру. Покажите, что интегралы по большой $\gamma(r)$ и маленькой $\gamma(\varepsilon)$ окружности стремятся к нулю. Остается в равенстве, полученном из теоремы Коши предельным переходом:

$$-\int\limits_0^\infty 4\pi i R(x)\ln x dx + \int\limits_0^\infty 4\pi^2 R(x) dx = 2\pi i \sum res(R(z)\ln^2 z).$$

Тут два интеграла, но если функция R действительна, то быстро получаем ответ:

$$\int\limits_0^\infty 4\pi i R(x)\ln x dx = -(1/2) Re \sum res(R(z)\ln^2 z).$$

Мы рассмотрели самые простые типы интегралов и не все. Особенности могут быть на вещественной оси или возникать при аналитическом продолжении. Иногда нужно модифицировать контур.