

Листок 5.

Задача 1. Пусть функция f голоморфна. Проверьте справедливость равенств $\Delta|f|^2 = 4|f'|$, $\Delta \ln(1 + |f|^2) = 4|f'|/(1 + |f|^2)^2$.

Задача 2. Пусть функция f голоморфна в круге с центром в нуле, число $r > 0$ меньше радиуса этого круга. Верно ли, что

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Задача 3. Пусть функция f голоморфна в круге с центром в нуле. Тогда при $r > 0$ не превышающем радиуса этого круга справедливо равенство

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Задача 4. Пусть функция f гармонична и положительна в круге с центром в нуле и радиусом R . Покажите, что при $|z| < R$ справедливо неравенство

$$\frac{R - |z|}{R + |z|} \leq \frac{f(z)}{f(0)} \leq \frac{R + |z|}{R - |z|}$$

Задача 5. Пусть для непрерывной в области функции справедлива теорема о среднем. Докажите, что эта функция гармоническая.