Лекция 11

1) смысл кривизны

Риманова геометрия

2) TM, риманова метрика

3) изометрические отображения, изометрии, локальные изометрии

4) кручение, симметрические связности, симметричность символов Кристоффеля в голономном базисе по нижним индексам

5) TM, тензоры, ковариантная производная тензоров, запись в координатах

6) L_X и ∇_X

7) согласованность с метрикой. Связность Леви-Чивита.

8) Тензор Римана и его симметрии, запись в координатах, тождества

9) Тензор Риччи, скалярная кривизна

10) Секционная кривизна

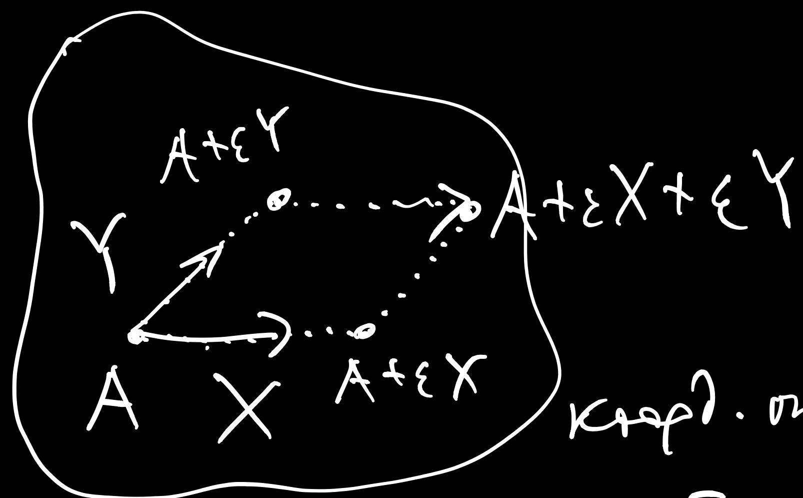
в следующий раз

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (*) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$ задача Коши

$$x(t) = x(0) + \underline{\dot{x}(0)}\, t + o(t) =$$
$$= x(0) + f(0, x_0)\, t + o(t)$$
$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0) t + \frac{\ddot{x}(0)}{2} t^2 + o(t^2)$$

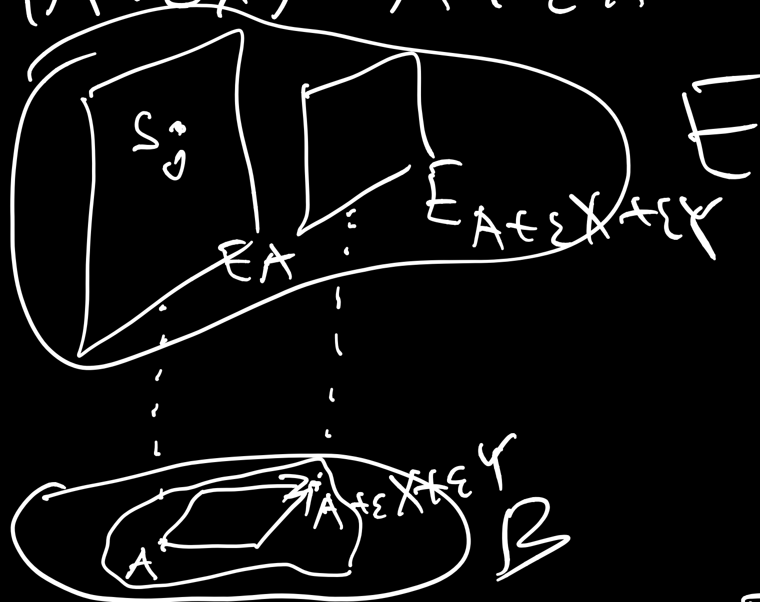
продифф. $(*)$

$$\ddot{x}(t) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))\dot{x}(t)$$
$$\ddot{x}(0) = f_t(0, x_0) + f_x(0, x_0) f(0, x_0)$$
$$x(t) = x(0) + f(0, x_0) t +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f_t(0, x_0) + f_x(0, x_0) f(0, x_0)\right) t^2 + o(t^2)$$



коорд. пр-во $x^1, \ldots, x^n$

$$(A+\varepsilon X)^i = A^i + \varepsilon X^i$$



уравнение $\parallel$ переноса $\quad \nabla_{\dot\gamma} S = 0$

локально $\nabla = d + \omega$

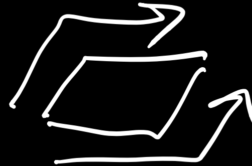
$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = -\omega(\dot\gamma)s \\ s(0) = s_0 \end{cases} \quad \Pi_{A \xrightarrow{\gamma} B}\, s$$

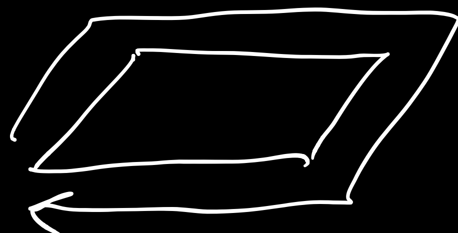
Большое вычисление дает формулу:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Pi_{A+\varepsilon X\mapsto A+\varepsilon X+\varepsilon Y}\circ\Pi_{A\mapsto A+\varepsilon X}\,s_0-\Pi_{A+\varepsilon Y\mapsto A+\varepsilon Y+\varepsilon X}\circ\Pi_{A\mapsto A+\varepsilon Y}\,s_0}{\varepsilon^2}=$$

$$=F_A(X,Y)\,s_0$$

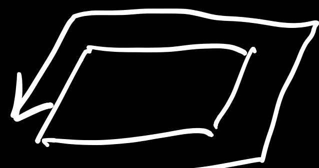
геометрический смысл кривизны





$$F=\nabla^2 \Leftrightarrow F(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}$$

альтернативное соглашение



$$F(X,Y)=\nabla_Y\nabla_X-\nabla_X\nabla_Y+\nabla_{[X,Y]}$$

$$F=-\nabla^2$$

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

касательное расслоение

$$\begin{array}{c} TM \\ {\scriptstyle p}\downarrow \\ M \end{array}$$

$(\,,\,)$ на TM $=$ риманова метрика на M

$g = (\,,\,)$

e_i базис в вект. полях

$g_{ij} = (e_i, e_j)$

$$\begin{array}{c} T^*M \\ {\scriptstyle p}\downarrow \\ M \end{array}$$

$(\,,\,)$ индуцированная метрика

e^i базис в 1-формах, дуальный к e_i

$$g^{ij} = (e^i, e^j) \qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$$

$$\underset{(\,,\,)^M}{M} \xrightarrow{F} \underset{(\,,\,)^N}{N}$$

<u>Опр</u> F - изометрическое, если $\forall A \in M$ $\forall X, Y \in T_A M$ верно

$$(X,Y)^M_A = \left(d_A F(X), d_A F(Y)\right)^N_{F(A)} \quad (*)$$

$(M, (\,,\,))$ ← риманово многообразие

$$M \xrightarrow{F} N$$
$$(\,,\,)^N$$

Можно ли ввести на M скалярное произведение формулой (*)?

<u>Утв</u> В этой ситуации введенная метрика на M риманова $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} d_A F = 0$ для любой точки A.

В такой ситуации метрика, построенная на M, называется индуцированной из метрики $(\,,\,)^N$ с помощью отображения F или обратным образом этой метрики с помощью отображения F

$$(\,,\,)^M = F^*(\,,\,)^N$$

$$g^M = F^* g^N$$

<u>Пример</u> $M \overset{i}{\hookrightarrow} N$ подмног.

$$(\,,\,)^M = i^*(\,,\,)^N = (\,,\,)^N\big|_M$$

Опр Если отобр-е $F: M \to N$ диффеоморфизм и изометрическое отображение, то оно называется **изометрия**

Опр Отображение римановых мн-й $F: M \to N$ — локальная изометрия, если $\forall A \in M$ $\exists$ окрестность $U \ni A$ т.что $U \xrightarrow{F} F(U)$ изометрия

Кручение, симм. связности

M мн-е

$E \to M$ $\quad \nabla$ связность в E

$\nabla_X S \qquad \cancel{\nabla_S X}$

∇ связность в TM

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

Опр T — кручение связности в TM

Утв 1) $T(X,Y)$ билинейно над $\mathbb{R}$
2) $T(X,Y)$ кососимметрично
3) $T(X,Y)$ линейно над C^∞

$\triangleright$ 1), 2) — очевидно

3) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

$[X, fY] = (Xf)Y + f[X,Y]$

$\Rightarrow T(X, fY) = \ldots = fT(X,Y)$ $\triangleleft$

Следствие T — тензор типа $\binom{1}{2}$

$T: T_A M \times T_A M \longrightarrow T_A M$

Опр ∇ симметрическая, если её кручение равно 0.

Утв ∇ — симметрическая $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

$x^1,\dots,x^n$ локальные к-ты на M

$e_1=\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,e_n=\frac{\partial}{\partial x^n}$ голономный базис

$$[e_i,e_j]=\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$$

$$\nabla_{e_i}e_j-\nabla_{e_j}e_i=0$$

Утв В базисе $\frac{\partial}{\partial x^i}$ для симметрической связности выполнено

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$$

$$T^k_{ij}=(T(e_i,e_j))^k=e^k(T(e_i,e_j))$$

2-формы кручения

$$T^k=\sum_{i<j}T^k_{ij}\,e^i\wedge e^j$$

Тензоры

V векторное пр-во

$$\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{p}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{q}=T^p_qV$$

пространство тензоров типа $\binom{p}{q}$

в V базис e_i

в V^* дуальный базис e^i

в T^p_qV базис

$$e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_q}$$

$$S\in T^p_qV$$

$$\Updownarrow$$

$$S=S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_q}$$

$$\begin{array}{ccc} TM & \qquad & T^p_q M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & & M \end{array}$$

$$T^p_q M = \underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{p} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}_{q}$$

$$(T^p_q M)_A = \underbrace{T_A M \otimes \ldots \otimes T_A M}_{p} \otimes \underbrace{T^*_A M \otimes \ldots \otimes T^*_A M}_{q}$$

$$S \in \Gamma(\mathcal{U}, T^p_q M)$$

Тензорное поле типа $\binom{p}{q}$

$$S(A) \in (T^p_q M)_A$$

традиционно тоже называется

тензором

$x^1, \ldots, x^n$ лок к-ты

$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ базис в вект. полях

$e^i = dx^i$ базис в 1-формах

$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_p}$

базис в тензорах (тензорных полях)

типа $\binom{p}{q}$

$$S = S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$$

гладкие функции

? вект. расслоение

∇ связность

$\longrightarrow$ связность в ξ^*, $\xi \otimes \eta$, $\xi \otimes \xi^*$ ...

M, ∇ - связность в TM

$\longrightarrow$ возникают индуцированные

связности в T^*M, $TM \otimes TM = T^2_0 M$ и т.д.

$S \in \Gamma(\mathcal{U}, T^p_q M)$

X векторное поле на $\mathcal{U}$

$\nabla_X S \in \Gamma(\mathcal{U}, T^p_q M)$

Хитрое место:

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{U}, \xi) \to \Omega^1(\mathcal{U}, \xi) =$$
$$= \Gamma(\mathcal{U}, T^* M \otimes \xi)$$

$\xi = T^p_q M$

$$\Rightarrow T^* M \otimes \xi \cong \xi \otimes T^* M =$$
$$= \underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{p} \otimes \underbrace{T^* M \otimes \ldots \otimes T^* M}_{q} \otimes T^* M =$$
$$= T^p_{q+1} M$$

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{U}, T^p_q M) \to \Gamma(\mathcal{U}, T^p_{q+1} M)$$

$$S = S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$$

к-ты S

Координаты ∇S записываются как

$$S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q ; j}$$

<u>Пример</u> X — векторное поле

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$ Тензор типа $\binom{1}{0}$

∇X Тензор типа $\binom{1}{1}$ поле операторов

$$\nabla = d + \Gamma$$

$$X^i_{;j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k$$

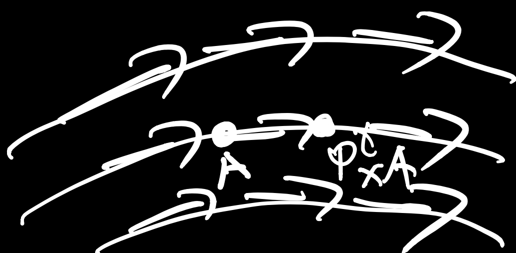
<u>Упр</u> Проверить эту формулу

L_X и ∇_X

- L_X только вдоль векторного поля X

$$\begin{cases} \dot{x}^i = X^i(x^1, \dots, x^n) \\ x^i(0) = A \end{cases}$$

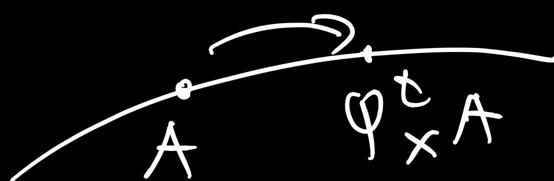
$x^i(t, A)$



X

$$\varphi_X^t : M \to M$$

$$A \mapsto x^i(t, A)$$



$$\lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_X^t)^* \omega - \omega}{t} = L_X \omega$$

- L_X не требует дополнительной структуры
- ∇_X можно брать вдоль вектора

не требует ∇

Упр Для симметрических связностей

$$(L_Y\omega)(X_1,\dots,X_k)=(\nabla_Y\omega)(X_1,\dots,X_k)+\sum_{i=1}^{k}\omega(X_1,\dots,\nabla_{X_i}Y,\dots,X_k)$$

Согласованность с метрикой

M $\langle\,,\rangle$ риманова метрика

TM ∇ связность

Опр ∇ согласована с метрикой, если $\forall$ вект. полей X, Y

$$d\langle X,Y\rangle=\langle\nabla X,Y\rangle+\langle X,\nabla Y\rangle$$

$$\Updownarrow\ \forall Z$$

$$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle$$

Упр ∇ согласована с метрикой $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nabla g = 0$

$\uparrow$ тензор типа $\binom{0}{2}$

$\Leftrightarrow g_{ij;k} = 0 \quad \forall i,j,k$

<u>Теорема</u> (Леви-Чивита) На римановом многообразии существует и единственна симметрическая связность, согласованная с метрикой. При этом

$$(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\big(X(Y,Z) + Y(Z,X) - Z(X,Y) + (Z,[X,Y]) + (Y,[Z,X]) - (X,[Y,Z])\big) \quad (*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(e_i g_{jl} - e_l g_{ij} + e_j g_{li} - c_{ilj} + c_{ijl} - c_{jli}\right),$$

где $c_{ijl} = ([e_i, e_j], e_l)$, $(**)$

в частности если $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$,
то $[e_i, e_j] = 0$; $e_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$,
поэтому

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \right).$$

▶ 1) Пусть такая связность есть.
Тогда $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ и
$X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$
подставляем в правую часть (*),
сокращаем и получаем левую,
т.е. если ∇ существует, то
оно определяется из формулы
(*).
(**) получается из (*) если
взять $X = e_i$, $Y = e_j$, $Z = e_k$
$\Rightarrow$ связность определена (*)
или (**) однозначно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственность

г) существование – на следующей лекции