Лекция 14

1. Киллинговы векторные поля и группа изометрий
2. геодезические
3. Экспоненциальное отображение
4. Теорема Уайтхеда

(M, g)

Группа изометрий M

$G = \{F : M \to M \mid F$ - изометрия$\}$

<u>Th</u> G - группа Ли.

F_t семейство изометрий

$F_0 = id$

$\frac{dF_t}{dt}$ векторное поле

$$\mathcal{L}_X g = 0$$

<u>Опр</u> Глобальное векторное поле X на (M, g) называется полем Киллинга, если

$$\mathcal{L}_X g = 0.$$

<u>Геодезические</u>

(M, g) риманово многообразие

$g \longmapsto \nabla$ связность Леви-Чивита

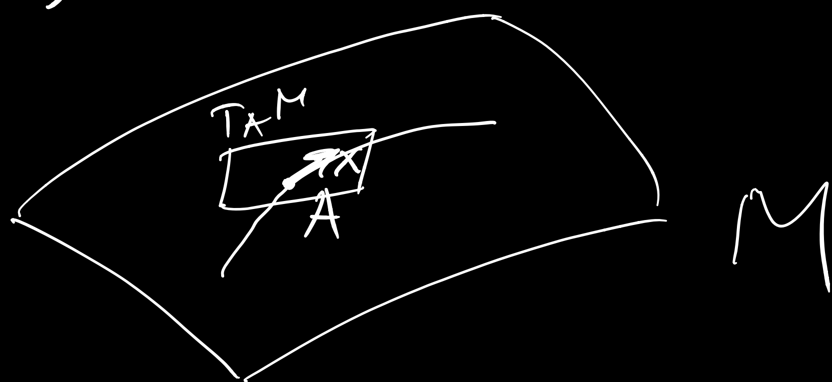
<u>Опр</u> $\gamma(t)$ – геодезическая, если

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$$

$x^1, .., x^n$ локальные к-ты

$$\begin{cases} \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\,\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \\ x^i(t_0) = A^i \\ \dot{x}^i(t_0) = \bar{X}^i \end{cases}$$

задача Коши



Теорема существования и единственности для геодезических. Пусть (M, g) — риманово многообразие, $A \in M$, $X \in T_A M$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $\exists$ геодезическая $\gamma : (a, b) \to M$, т.что $t_0 \in (a, b)$, $\gamma(t_0) = A$, $\dot{\gamma}(t_0) = X$ и если эта геодезическая непродолжима, то она единственна.

Утв Если $\gamma(t)$ - геодезическая, то t - аффинный натуральный параметр

$\triangleright$ $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \Rightarrow \dot\gamma \parallel$ вдоль $\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow |\dot\gamma| = const$ $\triangleleft$

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \\ \gamma(t_0) = A \\ \dot\gamma(t_0) = X \end{cases}$$ задача Коши

если $t_0 = 0$, то решение мы будем обозначать $\gamma_{A,X}(t)$ или

$\gamma(t; A, X)$

$\tilde\gamma(t) = \gamma_{A,X}(\lambda t)$

$\dot{\tilde\gamma}(t) = \lambda \dot\gamma_{A,X}(\lambda t)$

$\nabla_{\dot{\tilde\gamma}}\dot{\tilde\gamma} = \nabla_{\lambda\dot\gamma}\lambda\dot\gamma = \lambda^2 \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\gamma}$ тоже геодезическая

$$\tilde{\gamma}(0) = \gamma_{A,X}(0) = A$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \lambda \dot{\gamma}_{A,X}(0) = \lambda X$$

то есть верно

Утв $\gamma_{A,X}(\lambda t) = \gamma_{A,\lambda X}(t)$

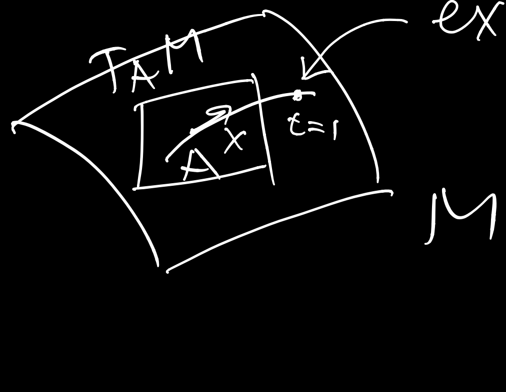
Экспоненциальное отображение

$(A,X) \in TM$ т.к. $X \in T_A M$

Опр $\exp_A : T_A M \to M$ экспоненциальное отображение в точке A

$$\exp_A X = \gamma_{A,X}(1)$$

$\exp_A X = \gamma_{A,X}(1)$



Важно: $\exp_A$ может быть не определено на всём T_AM, т.к. некоторые геодезические могут быть определены на максимальном интервале $(a,b) \not\ni 1$.

$\exp_A 0 = A$ т.к. $\gamma_{A,0}(t) \equiv A$

Запишем свойство однородности в координатах

$$\gamma^i(\lambda t; A, X^1, \ldots, X^n) = \gamma^i(t; A, \lambda X^1, \ldots, \lambda X^n)$$

решение гладко зависит от $X^1, \ldots, X^n$

продифференцируем по λ

$$\frac{\partial \gamma^i}{\partial t}(\lambda t; A, X^1, \ldots, X^n)\, t =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \gamma^i}{\partial X^j}(t; A, \lambda X^1, \ldots, \lambda X^n)\, X^j$$

подставим $t=1,\ \lambda=0$

$$X^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \exp_A^i}{\partial X^j}(0)\, X^j$$

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \exp_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

то есть $d_0 \exp_A = Id$

(если он определён!)

$$\exp_A : T_A M \to M$$

$$\exp_A 0 = A$$

$$d_0 \exp_A : T_0(T_A M) \to T_A M$$

V – векторное пр-во

$$w \in V \Rightarrow T_w V \cong V$$

поэтому мы отождествляем $T_0(T_A M) \simeq$

$\simeq T_A M$

$d_0 \exp_A : T_A M \to T_A M$

и $d_0 \exp_A = \mathrm{Id}$

Важно: чтобы $d_0 \exp_A$ был определен, надо, чтобы $\exp_A$ было определено в окрестности $0 \in T_A M$

Рассмотрим локальные к-ты $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности точки A

Следствие из теоремы о зависимости решения задачи Коши от начальных данных: пусть точка A_0 имеет к-ты $(A_0^1 \ldots A_0^n)$. Тогда $\exists\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0$ и окрестность U точки $(A_0^1, \ldots, A_0^n)$, такие, что при $|t| < \varepsilon$, $\sqrt{(X^1)^2 + \ldots + (X^n)^2} < \delta$,

$(A^1, .., A^n) \in \nabla$ решение

$\gamma^i(t, A^1, .., A^n, X^1, .., X^n)$ задачи

Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \\ x^i(t_0) = A^i \\ \dot{x}^i(t_0) = \overline{X}^i \end{cases} \quad (*)$$

существует и дифференцируемо

по $A^1, .., A^n, X^1, .., X^n$.

Вспомним:

$$\underline{\gamma_{A,X}(\lambda t)} = \gamma_{A,\lambda X}(t)$$

определена

при $|\lambda t| < \varepsilon \Leftrightarrow |t| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ $\quad \lambda > 0$

Возьмём такую λ, что $\frac{\varepsilon}{\lambda} = 2$, т.е.

$\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$, тогда $\gamma_{A, \lambda x}(t)$

определено при $|t| < 2$

Но: $|X| < \delta \Rightarrow |\lambda X| < \lambda\delta = \frac{\varepsilon\delta}{2}$

Следствие (в тех же условиях) пусть

точка A_0 имеет к-ты $(A_0^1, .., A_0^n)$.

Тогда $\exists$ $\delta > 0$ и окрестность

U точки $(A_0^1, .., A_0^n)$, такие, что

при $|t| < 2$, $\sqrt{(X^1)^2 + .. + (X^n)^2} < \delta$,

$(A^1, .., A^n) \in U$ решение

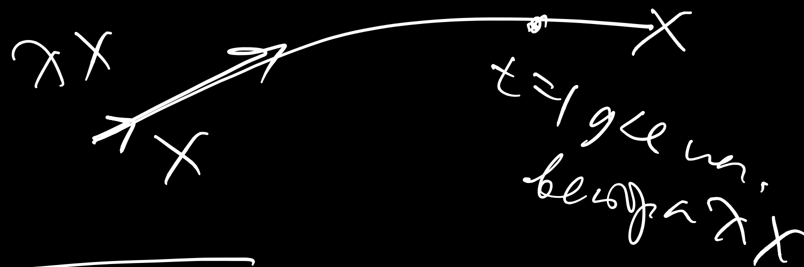
$\gamma^i(t, A^1, .., A^n, X^1, .., X^n)$ задачи

Коши

существует и дифференцируемо

по $A^1, .., A^n, X^1, .., X^n$.

$$\delta' = \frac{\varepsilon\delta}{2}$$

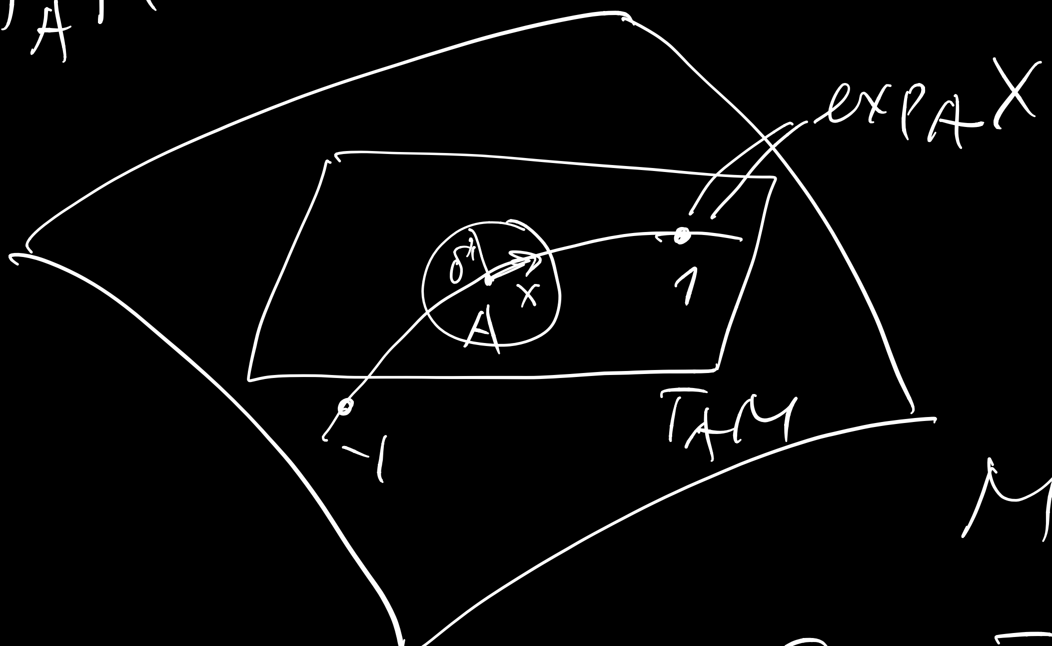


Топология на TM не зависит от выбора тривиализации, поэтому

$$\sqrt{(X^1)^2+\dots+(X^n)^2} < \delta' \iff \sqrt{g_{ij}X^iX^j} < \delta''$$

<u>Следствие</u>. Пусть $A_0 \in M$. Тогда $\exists\, \delta''>0$ и окрестность $U \ni A_0$ такие, что $\forall t, A \in M, X \in T_AM$ таких, что $|t|<2$, $A \in U$, $\|X\|<\delta''$, существует $\gamma_{A,X}(t)$, которая гладко зависит от A и X.

Следствие $\exp_A X$ определена на открытом мн-ве "$\|X\|<\delta$" в T_AM



Следствие. $d_0\exp_A = \mathrm{Id}: T_AM \to T_AM$

Следствие $\exp_A$ — локальный диффеоморфизм, то есть $\exists$ окрестность V точки $A\in M$ и окрестность $\tilde{V}$ точки $0\in T_AM$, такие, что

$$\widetilde{U} \xrightarrow[\sim]{\exp_A} U$$

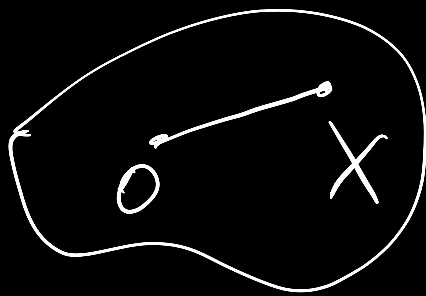
Утв 1) $\exp_A$ определено в некоторой открытой окрестности точки $0 \in T_A M$

2) можно считать, что эта окрестность обладает свойством звездности

3) $d_0 \exp_A = \mathrm{Id} : T_A M \to T_A M$

4) $\exp_A$ — локальный диффеоморфизм (окрестности 0 в $T_A M$ и окрестности A в M)

2) звёздность



$$\gamma_{A,X}(\lambda t) = \gamma_{A,\lambda X}(t)$$

подставим $t=1$

$$\gamma_{A,X}(\lambda) = \gamma_{A,\lambda X}(1)$$

пусть теперь $\lambda = t$

$$\gamma_{A,X}(t) = \exp_A(tX)$$

Утв $\gamma_{A,X}(t) = \exp_A tX$

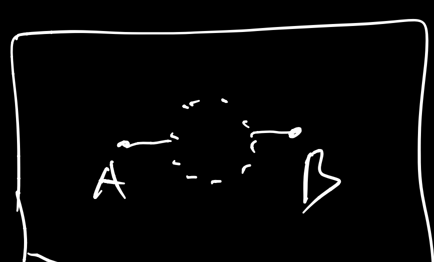
Евклидова геометрия:

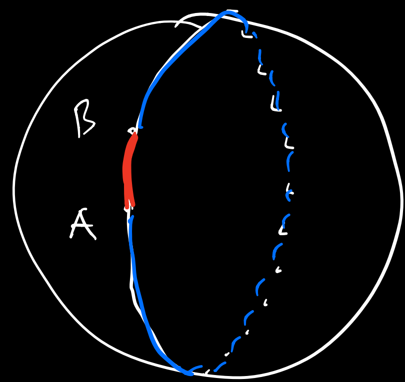
1) через две различные точки можно провести прямую
2) эта прямая единственна
3) отрезок этой прямой между этими точками — кратчайшая кривая, их соединяющая

Эти не верны для геодезических

контрпримеры:

(1) $\mathbb{R}^2 \setminus D^2$, g — евклидова
геодезические — прямые и дуги



(2) 

первые и вторые геодезические, соединяющие A и B

(3) красное короче синей, то есть синяя — не кратчайшая кривая

Эти свойства у геодезических выполняются локально!

Теорема Уайтхеда. Пусть (M, g) — риманово многообразие, а A — точка на M. Тогда у точки A существует такая окрестность W, что любые две точки W соединяются в ней единственной геодезической.

<u>Замечание</u>: W часто называется нормальной окрестностью точки A.

▷ 1) $F: TM \to M \times M$

$$F(x, v) = (x, \exp_x v)$$

не везде определено, но гладкое на области определения и определено в окрестности нулевого сечения

$$(\underset{M}{\underset{\cap}{x}}, \underset{T_xM}{\underset{\cap}{0}}) \in TM$$

$$d_{(x,0)} F = \left(\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline * & \underset{d_0 \exp_x}{\underset{\uparrow}{Id}} \end{array}\right) \text{ невырождено}$$

$\Rightarrow$ F — локальный диффеоморфизм, то есть у точки $(A, 0) \in TM$ есть окрестность $\widetilde{U}$ и у точки $(A, A) \in M \times M$ есть окрестность U, такие, что $\widetilde{U} \xrightarrow[\sim]{F} U$

2) $$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & M \\ M & \end{tikzcd}$$

Пусть $V = \pi_2(\tilde{U})$

Если $(p,q) \in V \Leftrightarrow \exists$ вектор $v \in T_pM$ т.что $(p,v) \in \tilde{U}$ и $F(p,v) = (p,q) \Leftrightarrow \exp_p v = q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ p и q соединяются геодезической

$$\exp_p tv, \quad t \in [0,1]$$

3) Уменьшив при необходимости $\tilde{U}$ и V можно считать, что $V = \pi_2(V)$ лежит в координатной окрестности с координатами $x^1, \ldots, x^n$, такими, что у точки A к-ты $(0, \ldots, 0)$

4) Уменьшив при необходимости $\tilde{U}$ и V еще раз, можно считать, что в $V = \pi_2(V)$ матрица

$\delta_{jk} - \sum_{i=1}^{n} \Gamma^{i}_{jk} x^{i}$ положительно определена.

5) Уменьшив $\ldots\ldots$ еще раз, можно считать, что

$$\tilde U = \{|x|<\mu,\ |v|<\nu\},$$

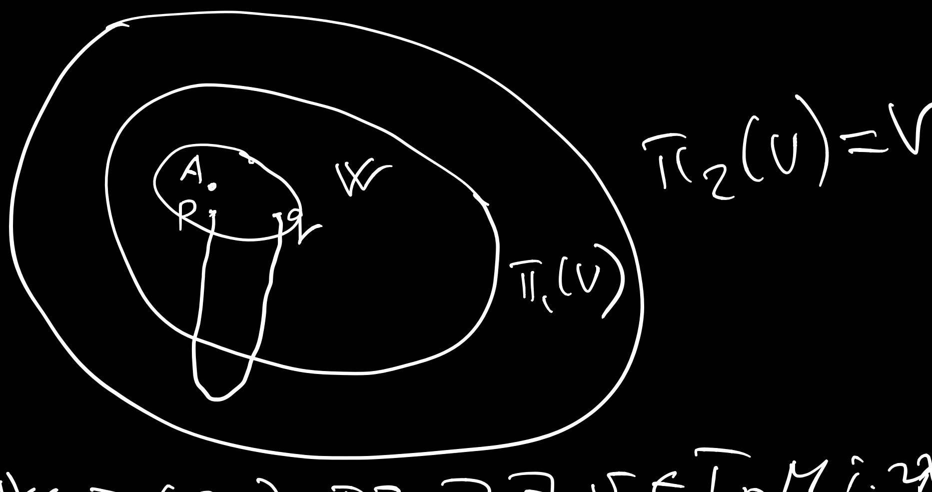
где $|a| = \sqrt{(a^1)^2+\ldots+(a^n)^2}$

6) $U = F(\tilde U) \subset M\times M$

$\exists\, W = \{x \mid |x|<\lambda\}$ т.ч.

$W\times W \subset U$

7) картинка



8) $p,q\in W \Rightarrow (p,q)\in U \Rightarrow \exists\, v\in T_pM$ т.ч.

$\exp_p v = q$

9) Т.к. $(p, \sigma) \in \widehat{U} \Rightarrow$ при $t \in [0,1]$ имеем $(p, t\sigma) \in \widetilde{U} \Rightarrow (p, \exp_p t\sigma) \in \widehat{U}$

$\Rightarrow \exp_p t\sigma \in \pi_2(U) = V$ при $t \in [0,1]$

10) это единственная геодезическая, соединяющая p и q в V, т.к. если $\exp_p t\sigma'$ тоже соединяет p и q, то $F(p, \sigma') = F(p, \sigma) = (p, q)$, но F - диффеоморфизм $\widehat{U}$ и U.

11) рассмотрим $f(x) = |x|^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$

$p, q \in W \Rightarrow f(p) \le \lambda^2, f(q) \le \lambda^2$

12) $f(\exp_p t\sigma) = \varphi(t)$.

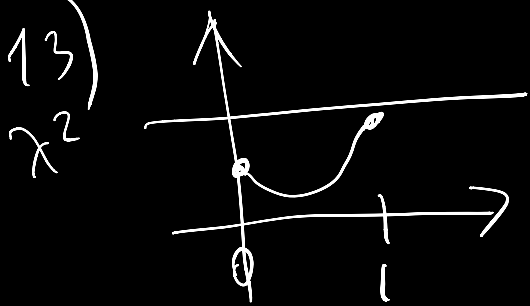
$$\dot{\varphi} = \left(\sum (x^i)^2\right)^{\cdot} = \sum 2 x^i \dot{x}^i$$

$$\ddot{\varphi} = 2 \sum (\dot{x}^i)^2 + 2 \sum x^i \ddot{x}^i =$$

$$= 2 \sum_i \left[(\dot{x}^i)^2 - x^i \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k \right] =$$

$$= 2\Big[\underbrace{\delta_{jk} - \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i} x^{i}}_{\text{полож. опред}}\Big]\dot{x}^{j}\dot{x}^{k} > 0$$

13)



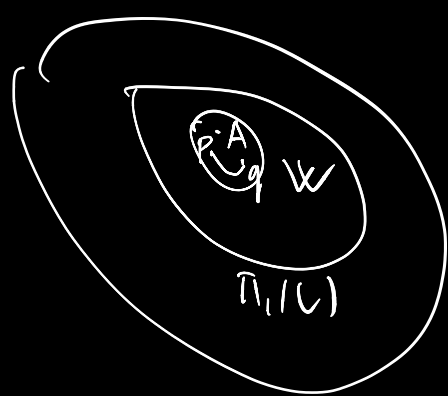
$\varphi(0) = f(p) \le \lambda^2$

$\varphi(1) = f(q) \le \lambda^2$

$\ddot{\varphi} > 0 \Rightarrow \varphi$ выпукла $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall t \in [0,1] \quad \varphi(t) \le \lambda^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exp_p t\sigma \in W$



$V = \Pi_2(U)$