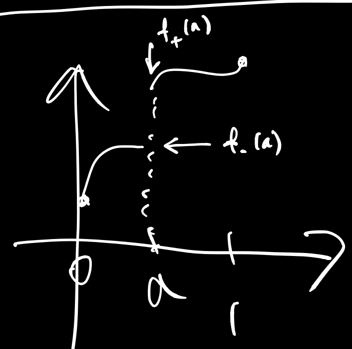
Лекция 16

1. Первая вариация функционала энергии.
2. Вторая вариация функционала энергии
3. Уравнение Якоби и якобиевы поля.
4. Сопряженные точки, их кратность
5. Якобиевы поля и геодезические вариации.
6. Сопряженные точки и минимальность геодезических



$$\Delta_a f = f_+(a) - f_-(a)$$

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^a f'(x)\,dx + \int_a^1 f'(x)\,dx =$$

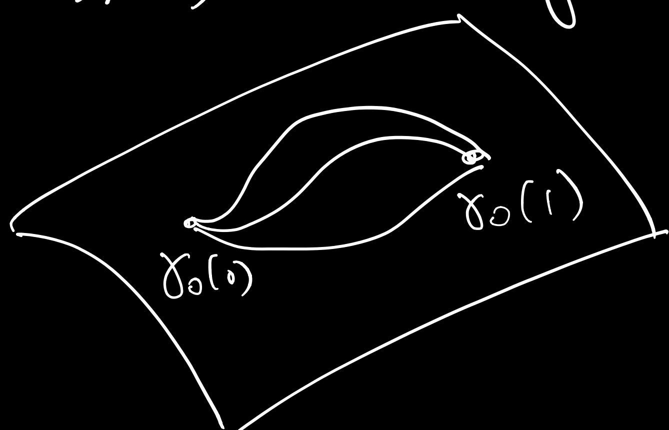
$$= f_-(a) - f(0) + f(1) - f_+(a) =$$

$$= f(1) - f(0) - \Delta_a f$$

$$E[\gamma] = \int_0^1 \langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle \, dt$$

$\gamma_0(t)$

вариация $\gamma(s,t)$ кривой $\gamma_0(t)$ — это значит, что $\gamma(0,t) = \gamma_0(t)$



вариация с закрепленными концами, т.е. $\forall s$ $\gamma(s,0) = \gamma_0(0)$

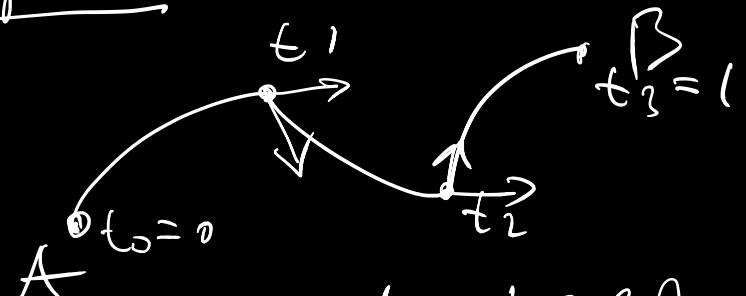
$\gamma(s,1) = \gamma_0(1)$

<u>Опр</u> Кривая γ_0 — экстремаль функционала E, если для все

любой вариации $\gamma(s,t)$ кривой $\gamma_0(t)$ имеем

$$\frac{d}{ds} E[\gamma(s,t)]\Big|_{s=0} = 0$$

<u>Мы рассматриваем кусочно-гладкие кривые</u>



$\gamma(t)$ непрерывна, но есть разрывы производной!

<u>Формально:</u> Для каждой кривой есть конечный набор точек $t_1, .., t_k \in (0,1)$, такой, что $\gamma(t) \in C[0,1]$ и

$$\dot\gamma(t) \in C^\infty(t_i, t_{i+1}), \ \forall i,$$

$t_0 = 0$, $t_{k+1} = 1$.

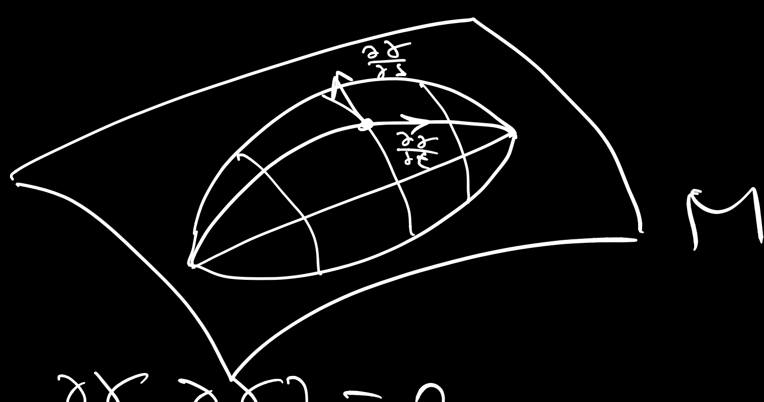
$$\frac{d}{ds}\frac{1}{2}E[\gamma(s,t)]\Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{1}{2}\int_0^1 \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt \Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt \Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial\gamma}{\partial s}\cdot\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt \Big|_{s=0} =$$

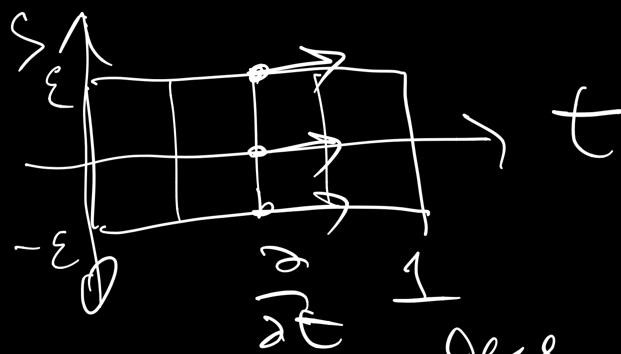
$$= \int_0^1 \left\langle \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}}\frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt \Big|_{s=0} =$$

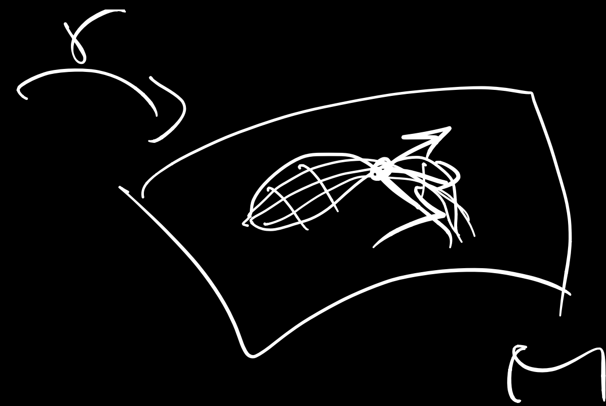


$$\left[\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right] = 0$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$= \underline{\int_0^1 \left\langle \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt} \Big|_{s=0} =$$





мы на самом деле работаем тут

∇

$$\gamma^*\nabla$$

$$\gamma^*\langle\, , \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle$$

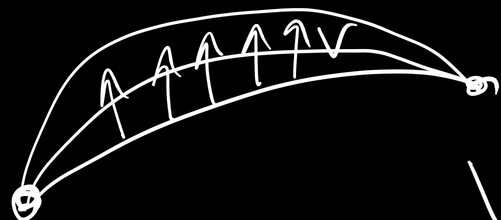
$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt\,\Big|_{s=0} - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt\,\Big|_{s=0} =$$

Наши вариации тоже кусочно-гладкие по t

$\frac{\partial\gamma}{\partial s}$ непрерывна, у $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ есть разрывы

$$= \cancel{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \Big|_0^1} \Big|_{s=0} - \sum_{i=1}^{k} \Delta_{t_i} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{s=0} -$$

$$- \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle dt \,\Big|_{s=0} =$$



векторное поле вариации

$$V = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

$$\forall s \ \gamma(s,0) = \gamma(0) \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\text{— // —} \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{t=1} = 0$$

$$= - \sum_{i=1}^{k} \left\langle \overline{V}_{(\gamma_0(t_i))}, \Delta_{t_i} \dot{\gamma}_0 \right\rangle -$$

$$- \int_0^1 \left\langle \overline{V}, \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0 \right\rangle dt$$

Формула первой вариации функционала энергии.

Лемма $\forall$ векторного поля $\bar{V}$ на кривой γ_0, т.ч. $\bar{V}(\gamma_0(0))=0$, $\bar{V}(\gamma_0(1))=0$

существует вариация $\gamma(s,t)$ кривой $\gamma_0(t)$, такая, что $\left.\dfrac{\partial\gamma}{\partial s}\right|_{s=0} = V$

$\rhd$ $\gamma(s,t) = \exp_{\gamma_0(t)}(s\bar{V})$ $\lhd$

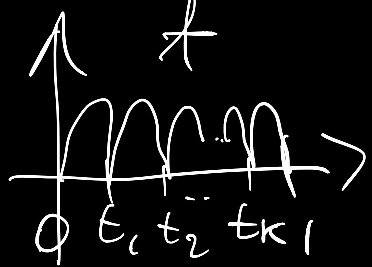
Ув Экстремали функционала энергии (в классе кусочно-гладких кривых с закреплёнными концами) - в точности решения уравнения геодезических

$$\nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0 = 0,$$

то есть геодезические с аффинным натуральным параметром.

⇐ очевидно

⇒ экстремаль ⇒ $\forall\ \bar V$ первая вариация равна 0.



$$\bar V = f \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma$$

тогда первая вариация равна

$$-\int_0^1 \underset{\geqslant 0}{f}\, |\nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0|^2\, dt = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ вне t_i: $\nabla_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0 = 0$

$\Rightarrow$ γ_0 на (t_i, t_{i+1}) — геодезическая.

То есть экстремаль — кусочно-геодезическая

Выберем такое V, что

$$V(\gamma_0(t_i)) = \Delta_{t_i}\dot\gamma_0$$

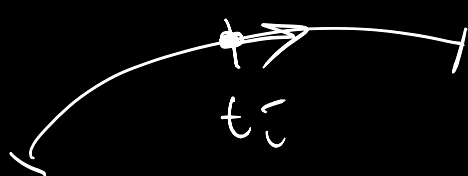
тогда первая вариация

$$-\sum_{i=1}^{k} |\Delta_{t_i}\dot{\gamma}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \quad \Delta_{t_i}\dot{\gamma} = 0 \Rightarrow$$

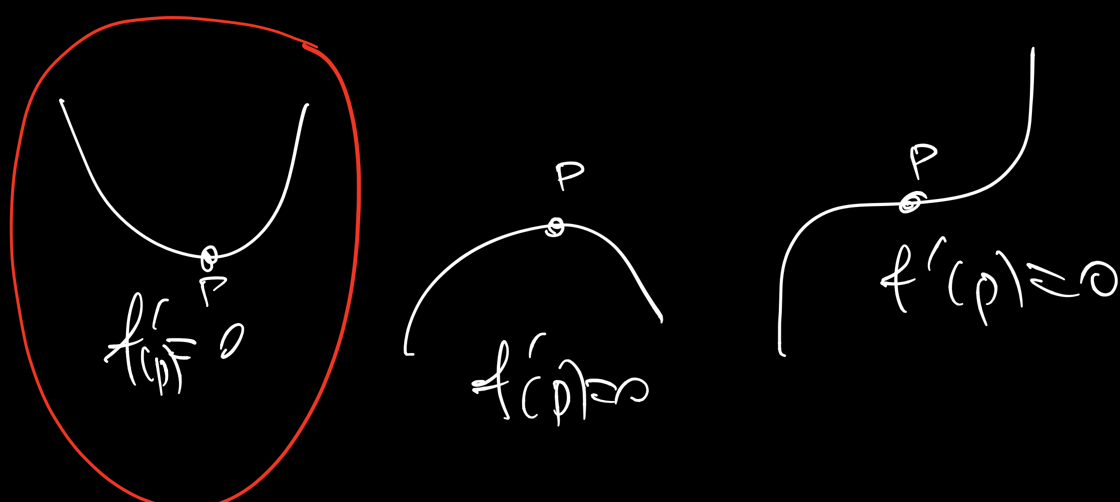
$$\Rightarrow \gamma_0 \in C^1[0,1]$$

т.к. уравнение геодезических второго порядка, то $\gamma(t_i)$ и $\dot{\gamma}(t_i)$ полностью определяют γ на обоих участках



$$\Rightarrow \gamma_0 \in C^\infty[0,1]$$

$\Rightarrow$ Экстремаль — в точности геодезические



$f''(p)>0 \qquad f''(p)<0 \qquad f''(p)=0$

Вторая вариация функционала энергии

$\gamma_0(t)$ кривая

$\gamma(s_1, s_2, t)$ — вариация с двумя параметрами

если $\gamma(0,0,t) = \gamma_0(t)$

$$E[\gamma(s_1, s_2, t)] \; -$$

— функция от s_1, s_2

если $\gamma_0(t)$ - локальный минимум E,

то $E[\gamma(s_1, s_2, t)]$ имеет

$s_1 = s_2 = 0$ локальный минимум $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \frac{1}{2} E[\gamma(s_1, s_2, t)] \Big|_{s_1, s_2 = 0}$$

положительно определенная

симметрическая билинейная форма

от $V = \left.\frac{\partial \gamma}{\partial s_1}\right|_{s_1=s_2=0}$,

$$W = \left.\frac{\partial \gamma}{\partial s_2}\right|_{s_1=s_2=0}.$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\left(-\sum_{i=1}^{k}\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s_1}, \Delta_{t_i}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s_1}, \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\rangle dt\right)\Bigg|_{\substack{s_1=0\\ s_2=0}} =$$

$$= \Bigg(-\sum_{i=1}^{k}\left(\cancel{\left\langle \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s_2}}\frac{\partial \gamma}{\partial s_1}, \Delta_{t_i}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\rangle} + \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s_1}, \Delta_{t_i}\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s_2}}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\rangle\right) -$$

$$- \int_0^1 \cancel{\left\langle \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s_2}}\frac{\partial \gamma}{\partial s_1}, \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\rangle} dt - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s_1}, \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s_2}}\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\rangle dt\Bigg)\Bigg|_{\substack{s_1=0\\ s_2=0}} =$$

т.к. мы стоим на геодезической

$$= -\sum_{i=1}^{k}\left\langle V(\gamma_0(t_i)), \Delta_{t_i}\nabla_{\dot\gamma} W\right\rangle -$$

$$-\int_0^1 \left\langle V, \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} W + R(W,\dot\gamma)\dot\gamma\right\rangle dt$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \cancel{\nabla_{[X,Y]} Z}$$

$$X = \frac{\partial \gamma}{\partial s_2},\ Y = \frac{\partial \gamma}{\partial t},\ Z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$$\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s_2}} \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t} = R\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s_2}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial t} +$$

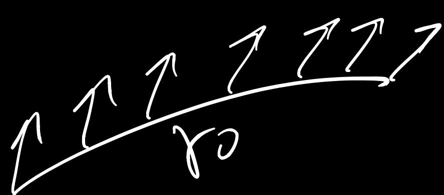
$$+ \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \underbrace{\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s_2}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}}_{\parallel\ \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial s_2}}$$

<u>То есть формула для второй вариации функционала энергии на геодезической</u>

$$-\sum_{i=1}^{k} \langle \bar V(\gamma_0(t_i)), \Delta_{t_i} \nabla_{\dot\gamma} W \rangle -$$

$$-\int_0^1 \langle \bar V, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma} \nabla_{\dot\gamma} W + R(W,\dot\gamma)\dot\gamma}\rangle\, dt = Q(V,W)$$

Опр $\nabla_{\dot\gamma}^2 J + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$ — уравнение Якоби, а его решение J — якобиево поле.



<u>Утв</u> W — якобиево векторное поле $\iff$

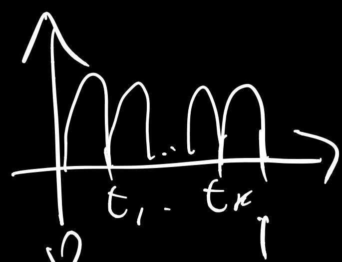
$\iff \forall V \quad Q(V,W)=0$.

▷ ($\Rightarrow$) очевидно

($\Leftarrow$) пусть W такое, что

$\forall V \quad Q(V,W)=0$

W кусочно-гладкое с точками разрыва у $\nabla_{\dot\gamma} W$ при $t=t_1,\dots,t_k$



$$V = f\left(\nabla_{\dot\gamma}^2 W + R(W,\dot\gamma)\dot\gamma\right)$$

$$Q(V,W) = -\int_0^1 f\left|\nabla^2_{\dot\gamma} W + R(W,\dot\gamma)\dot\gamma\right|^2 dt = 0$$

$\Rightarrow \nabla^2_{\dot\gamma} W + R(W,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$ выполнено на (t_i,t_{i+1})

Дальше, как и в док-ве первой геодезической, берем такое V, что $V(\gamma_0(t_i)) = \Delta_{t_i}\nabla_{\dot\gamma} W$

Тогда

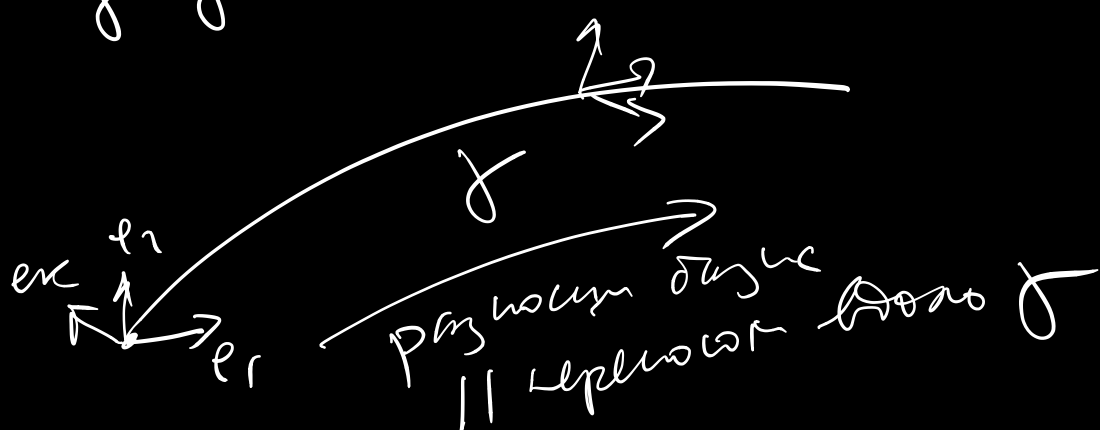
$$0 = Q(V,W) = -\sum |A_{ti} D_{\dot\gamma} W|^2$$

$\Rightarrow$ разрывы $= 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow W \in C^1[0,1]$

$\Rightarrow$ как решение ОДУ 2-го порядка $W \in C^\infty[0,1]$ поле Якоби

$$D_{\dot\gamma} D_{\dot\gamma} J + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$$



$$D_{\dot\gamma} e_i = 0$$

$$J = J^i e_i$$

$$\nabla_{\dot\gamma} J = \nabla_{\dot\gamma}(J^i e_i) =$$

$$= (\dot\gamma J^i)\, e_i + J^i \underbrace{\nabla_{\dot\gamma} e_i}_{=0} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt} J^i\right) e_i = \dot J^i e_i$$

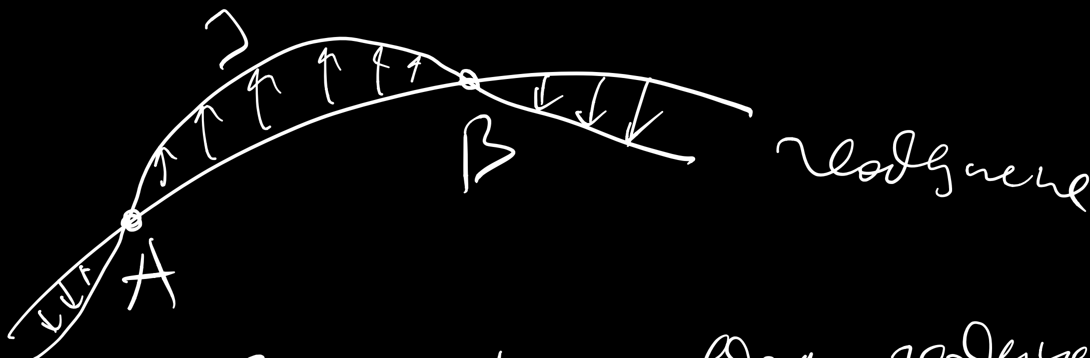
$$\ddot J^i e_i + R(J^j e_j, \dot\gamma)\dot\gamma = 0$$

$$\ddot J^i + J^j \big(R(e_j, \dot\gamma)\dot\gamma\big)^i = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

Система из n линейных ОДУ 2-го порядка

Утв. $J(\gamma(0))$ и $(\nabla_{\dot\gamma} J)(\gamma(0))$ полностью определяют $J(t) = J(\gamma(t))$

$\dim M = n \Rightarrow$ пространство якобиевых полей $2n$-мерно



Опр A и B сопряжены вдоль геодезической, если на этой геодезической есть якобиево поле J, т.ч.

$$J(A) = J(B) = 0.$$

Размерность пространства таких якобиевых полей называется кратностью сопряжения.

р-ть пр-ва якобиевых полей $2n$

$J(A) = 0$ n условий

$\Rightarrow$ кратность $\leq n$

__Утв__ о кратности $< n$

Достаточно предъявить такое якобиево поле J, что $J(A)=0$
$J(B)\neq 0$

$\dot\gamma \neq 0$

$J = t\dot\gamma$ если $\gamma(0)=A$

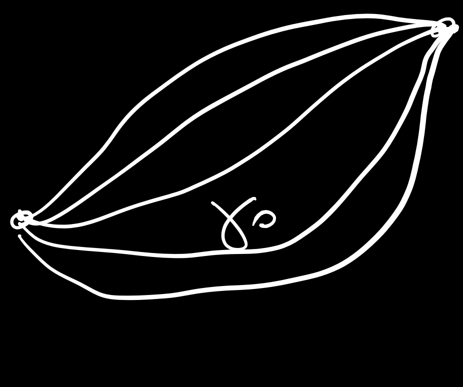
$J(B)\neq 0$

$$\nabla_{\dot\gamma}(t\dot\gamma) = \left(\frac{d}{dt}t\right)\dot\gamma + t\underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma}_{=0} = \dot\gamma$$

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}(t\dot\gamma) = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

$$R(t\dot\gamma,\dot\gamma)\dot\gamma = t\,R(\dot\gamma,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$$

__Опр__ вариация $\gamma(s,t)$ называется геодезической, если $\forall s$ кривые $\gamma(s,t)$ — геодезические



Утв Якобиевы поле — это в точности поле вариации геодезических вариаций

$\Rightarrow$ см. Милнор, Теория Морса

$\Leftarrow$ $\gamma(s,t)$ — геодезическая вариация $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall s \quad \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$0 = \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t} =$$

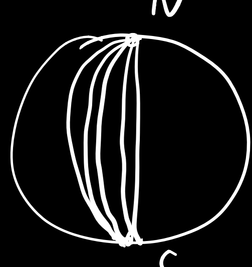
$$= R\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \overbrace{\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}}^{\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial s}}$$

$s = 0$

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} W + R(W, \dot\gamma)\dot\gamma = 0,$$

где $W = \left.\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right|_{s=0}$ поле вариации

N

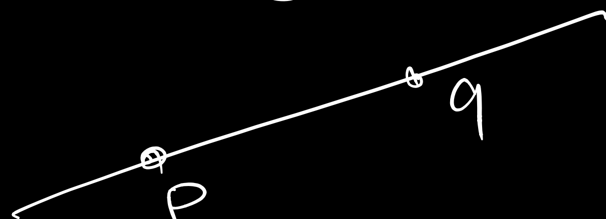


S

геодезическая вариация $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ N и S сопряжены вдоль меридиана.

$(\mathbb{R}^n, \text{евкл})$ $\quad R \equiv 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} J = 0 \qquad \vec{J} = \vec{A} t + \vec{B}$$



$$t=0$$

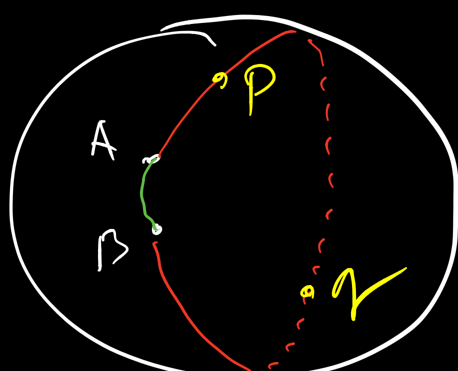
$$J(p) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow J = At \qquad \forall t \neq 0 \ J \neq 0$$

$\Rightarrow$ в $\mathbb{R}^n$ сопряженных точек нет

<u>Теорема</u> Если на геодезической есть пара сопряженных точек, то она не минимальна.

<u>Пример</u>



p и q — антиподальны $\Rightarrow$ сопряжены $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ красные геодезические не минимальны