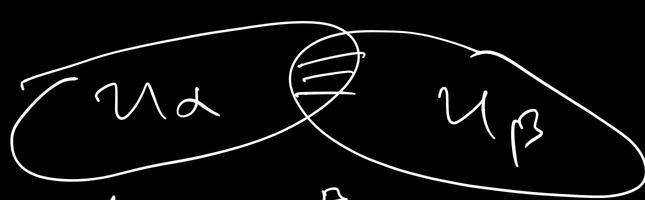
Лекция 19

1. det и tr как инвариантные многочлены
2. Инвариантные многочлены для $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$
3. Классы Чженя, Понтрягина и Эйлера
4. Замкнутость, независимость от выбора связности
5. Функториальность
6. Связь хар. классов для построенных расслоений с хар. классами исходных. Образующие Y.
7. Характер Чженя, класс Тодда



$\overset{\alpha}{\omega}$ $\quad$ $\overset{\beta}{\omega}$

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}$$

$$\overset{\alpha}{\omega} = g\overset{\beta}{\omega}g^{-1} + g\,dg^{-1}$$

$$F = \nabla^2 \qquad F \in \Omega^2(B, \operatorname{End} E)$$

$$\overset{\alpha}{F} = g\overset{\beta}{F}g^{-1}$$

$$\det(gFg^{-1}) = \cancel{\det g}\, \det F\, \cancel{(\det g)}^{-1} =$$
$$= \det F$$
$$\det F^{\alpha} = \det F^{\beta}$$
$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$
$$\operatorname{tr}(gFg^{-1}) = \operatorname{tr} \cancel{g^{-1}g} F = \operatorname{tr} F$$

$\mathbb{R}$ $\quad G = O(n),\ SO(n)$

$\mathbb{C}$ $\quad G = U(n)$

в ортонорм/унитарном базисе

F кососимметрична/косоэрмитова

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$
$$0 = d\delta_{\alpha\beta} = \langle \nabla e_\alpha, e_\beta \rangle + \langle e_\alpha, \nabla e_\beta \rangle =$$
$$= \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha$$
$\Rightarrow \omega$ к/симм

$(AB)^T = -B^T A^T$
если A, B 1-формы

$$F = d\omega + \omega \wedge \omega$$
$$F^T = (d\omega + \omega\wedge\omega)^T = d\omega^T - \omega^T \wedge \omega^T =$$

$= -d\omega - (-\omega)\wedge(-\omega) = -(d\omega + \omega\wedge\omega) = -F$

F к/сим

$\mathbb{R}$ $\quad G = O(n), SO(n)$

F к/сим $\Rightarrow F \in \mathfrak{g} = so(n)$

$\mathbb{C}$ $\quad G = U(n)$

F к/эрм $\Rightarrow F \in \mathfrak{g} = u(n)$

<u>Опр</u> Многочлен $P : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ называется инвариантным, если $\forall g \in G, X \in \mathfrak{g}$

$$P(gXg^{-1}) = P(X).$$

<u>Ут</u> Если P - инвариантный многочлен, то

$$dP(F) = 0$$

$\triangleright$ $F = d\omega + \omega\wedge\omega \Rightarrow d\omega = F - \omega\wedge\omega$

$dF = \cancel{d^2\omega} + d\omega\wedge\omega - \omega\wedge d\omega =$

$$= (F - \omega\wedge\omega)\wedge\omega - \omega\wedge(F - \omega\wedge\omega) =$$

$$= F\wedge\omega - \cancel{\omega\wedge\omega\wedge\omega} -$$

$$- \omega\wedge F + \cancel{\omega\wedge\omega\wedge\omega} =$$

$$= [F, \omega]$$

$$P(gXg^{-1}) = P(X)$$

$$g = I + \varepsilon \underset{\uparrow \mathfrak{g}}{Y} + \dots$$

$$g^{-1} = I - \varepsilon Y + \dots \quad (\text{ie } gg^{-1} = I)$$

$$P((I + \varepsilon Y + \dots) X (I - \varepsilon Y + \dots)) = P(X)$$

$$P(X + \varepsilon YX - \varepsilon XY + \dots) = P(X)$$

$$\cancel{P(X)} + \varepsilon \frac{\partial P(X)}{\partial X_\alpha^\beta} [Y, X]_\alpha^\beta + \dots = \cancel{P(X)}$$

$$\varepsilon \to 0$$

$$\frac{\partial P(X)}{\partial X_\alpha^\beta} [Y, X]_\alpha^\beta = 0$$

$$dP(F) = \frac{\partial P(F)}{\partial F_\alpha^\beta} dF_\alpha^\beta =$$

$$= \frac{\partial P(F)}{\partial F_\alpha^\beta} [F,\omega]_\alpha^\beta = 0$$

$$F \in \Omega^2(\mathrm{End}\, E)$$

$$P(F) \in \Omega^{2*}(B)$$

замкнута

$$[P(F)] \in H^{2*}_{dR}(B)$$

Опр $[P(F)]$ — характеристический класс расслоения $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}$, отвечающий инвариантному многочлену P

$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}$ + выбор 1) метрики $(\,,)$ 2) ∇, согласованной с метрикой $\xrightarrow{P} [P(F)] \in H^{2*}(B)$

Конструкция Чженя–Вейля характеристических классов

$$\begin{matrix} E & (\,,\,)_0 & (\,,\,)_1 \\ \downarrow & \nabla^0 & \nabla^1 \\ B & F^0 & F^1 \end{matrix}$$

Можно явно предъявить Θ т.ч.

$$P(F^0) - P(F^1) = d\Theta$$

$$\begin{tikzcd} pr_1^* E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ B \times \mathbb{R}_t \arrow[r, "pr_1"] & B \end{tikzcd}$$

$$pr_1^* \nabla^0 \qquad \nabla^0$$

$$pr_1^* \nabla^1 \qquad \nabla^1$$

Рассмотрим в $\begin{matrix} pr_1^* E \\ \downarrow \\ B \times \mathbb{R} \end{matrix}$ связность

$$\nabla^t = t\, pr_1^* \nabla^0 + (1-t)\, pr_1^* \nabla^1$$

$$B\times\mathbb{R} \underset{\iota_1}{\overset{\iota_0}{\leftleftarrows}} B$$

$$\iota_0(x)=(x,0)$$
$$\iota_1(x)=(x,1)$$

$$\nabla^0=\iota_0^*\nabla^t \qquad F^0=\iota_0^*F^t$$
$$\nabla^1=\iota_1^*\nabla^t \Rightarrow \quad F^1=\iota_1^*F^t$$

$$P(F^0)=\iota_0^*P(F^t)$$
$$P(F^1)=\iota_1^*P(F^t)$$

$$\iota_0\sim\iota_1 \Rightarrow [P(F^0)]=[\iota_0^*P(F^t)]=$$
$$=[\iota_1^*P(F^t)]=[P(F^1)]$$

Ут $[P(F)]$ не зависит от выбора метрики или согласованной с ней связности

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$$f^*F \qquad\qquad F$$

$$\left[P(f^*F)\right] = \left[f^*P(F)\right] = f^*\left[P(F)\right]$$

Функториальность

$G = U(n)$ унитарные матрицы

$A\bar{A}^T = I$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ косоэрмитовы матрицы

$\bar{X}^T = -X$

$$\underline{P}(gXg^{-1}) = P(X)$$

$$g \in G, \quad X \in \mathfrak{g}$$

<u>Факт</u>: Сопряжением подходящей унитарной матрицей косоэрмитову матрицу можно сделать диагональной

т.е. $\forall X \in \mathfrak{g}$ $\exists g \in G$, что

$$gXg^{-1} = \begin{pmatrix} -2\pi i x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x_n \end{pmatrix}$$

<u>Следствие</u> Достаточно описать P <u>на диагональных матрицах</u>

Факт: с помощью сопряжения унитарной матрицей можно переставлять диагональные элементы.

<u>Следствие</u> P — симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$

Рассмотрим элементарные симметрические многочлены

$$c_0(X) = 1$$

$$c_1(X) = x_1 + \ldots + x_n$$

$$c_2(X) = x_1 x_2 + \ldots$$

$$n = \operatorname{rk} E$$

$$\vdots$$

$$c_n(X) = x_1 \ldots x_n$$

$$c(X) = \det\left(I + \frac{iX}{2\pi}\right) = c_0(X) + c_1(X) + \dots + c_n(X)$$

Опр Характеристические классы

$c_i(E) = [c_i(F)] \in H^{2i}(B)$

называются i-ми классами Чженя расслоения E.

$c(E) = c_0(E) + \dots + c_n(E) =$

$= \left[\det\left(I + \frac{iF}{2\pi}\right)\right] \in H^{2*}(B)$

называется полным классом Чженя расслоения E.

Chern

$G = O(n)$ или $SO(n)$

Факт: кососимметрическую матрицу сопряжением подходящей ортогональной можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 2\pi y_1 \\ -2\pi y_1 & 0 \end{matrix} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \begin{matrix} 0 & 2\pi y_l \\ -2\pi y_l & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad n = 2l$$

или

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 2\pi y_1 \\ -2\pi y_1 & 0 \end{matrix} & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \square & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad n = 2l+1$$

Сопряжением $SO(n)$ — матрицей можно менять эти блоки $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P инвариантен при обмене y_i

Сопряжением из $O(n)$ можно менять знак $y_i \mapsto -y_i$

$\Rightarrow$ $O(n)$ инвариантные многочлены — это симметрические многочлены от y_i^2

$SO(2l+1)$ — то же самое, т.к. есть угловой ноль

$SO(2l)$ — можно менять знак у только чётного числа y_i одновременно, поэтому ещё есть инвариантный многочлен

$y_1 \dots y_l$

$$\det\left(I + \frac{X}{2\pi}\right) = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{p_0(X)} + \underset{\substack{\parallel \\ y_1^2 + \dots + y_l^2}}{p_1(X)} + \dots + \underset{\substack{\parallel \\ y_1^2 \dots y_l^2}}{p_l(X)}$$

Опр Для $G = SO(n)$ и $G = O(n)$

$$p_i(E) = [P_i(F)] \in H^{4i}(B)$$

называются i-ми классами Понтрягина расслоения E.

$$p(E) = \left[\det\left(I + \frac{F}{2\pi}\right)\right] \in H^{4*}(B)$$ — полный класс Понтрягина расслоения E.

Опр Для $G = SO(2l)$ есть ещё хар. класс Эйлера $e(E) =$

$= \left[Pf\left(\frac{X}{2\pi}\right)\right]$

$\uparrow$

пфаффиан

<u>Сл-е</u> $e^2(E) = p_e(E)$,

$\operatorname{rk} E = 2l$

$$\begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_1 \oplus E_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & B & B \end{array}$$

<u>Формула Уитни</u> для комплексных расслоений $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)$,

для вещественных расслоений

$$p(E_1 \oplus E_2) = p(E_1)\, p(E_2)$$

<u>Следствие</u> $c_0(E_1 \oplus E_2) + c_1(E_1 \oplus E_2) + c_2(E_1 \oplus E_2) + \ldots = (c_0(E_1) + c_1(E_1) + c_2(E_1) + \ldots) \cdot (c_0(E_2) + c_1(E_2) + c_2(E_2) + \ldots)$

$$c_0(E_1\oplus E_2)=c_0(E_1)\,c_0(E_2) \qquad 1=1\cdot 1$$

$$c_1(E_1\oplus E_2)=c_1(E_1)+c_1(E_2)$$

$$c_2(E_1\oplus E_2)=c_2(E_1)+c_1(E_1)\,c_1(E_2)+c_2(E_2)$$

$$\vdots$$

Для p аналогично

E тривиально $\Rightarrow \nabla = d \Rightarrow \omega=0 \Rightarrow F=0$

$\Rightarrow c(E)=1$

Следствие. Если $c(E)\neq 1$, то E нетривиально

Пусть у E есть глобальное сечение s, не обращающееся в 0.

$$\langle s\rangle \subset E \Rightarrow E=\langle s\rangle^{\perp}\oplus \underbrace{\langle s\rangle}_{\text{одномерное тривиальное}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(E)=c(\langle s\rangle^{\perp})\,\underbrace{c(\langle s\rangle)}_{=1}=$$

$$=c(\langle s\rangle^{\perp})$$

$\mathrm{rk}\,E=n \Rightarrow \mathrm{rk}\langle s\rangle^{\perp}=n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_n(E) = c_n(\langle s\rangle^{\perp}) = 0$

<u>Следствие</u> Если у E, $\operatorname{rk} E = n$, n-й класс Чженя не 0, то у E нет глобальных сечений.

Док-во формулы Уитни

I) через образующие Y (Шн)

$$E_1 \quad \nabla^1 \quad F^1 = \begin{pmatrix} -2\pi i x_1^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x_k^1 \end{pmatrix}$$

$$c(E_1) = \prod_i (1 + x_i^1)$$

аналогично

$$E_2 \quad \nabla^2 \quad F^2 = \begin{pmatrix} -2\pi i x_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x_m^2 \end{pmatrix}$$

$$c(E_2) = \prod_j (1 + x_j^2)$$

$$E_1 \oplus E_2 \quad \nabla^1 \oplus \nabla^2 \quad F = \left(\begin{array}{c|c} \ddots & \\ \hline & \ddots \end{array}\right)$$

$$c(E_1 \oplus E_2) = \prod_i (1 + x_i^1) \prod_j (1 + x_j^2) =$$

$$= c(E_1)\, c(E_2)$$

II) E_1 $\quad \nabla^1 \quad F^1$

$\quad E_2 \quad \nabla^2 \quad F^2$

$E_1 \oplus E_2 \quad \nabla^1 \oplus \nabla^2 \quad F = \left(\begin{array}{c|c} F^1 & 0 \\ \hline 0 & F^2 \end{array}\right)$

$$c(E_1 \oplus E_2) = \left[\det\left(I + \frac{iF}{2\pi}\right)\right] =$$

$$= \left[\det\left(I + \frac{iF^1}{2\pi}\right)\right]\left[\det\left(I + \frac{iF^2}{2\pi}\right)\right] =$$

$$= c(E_1)\, c(E_2)$$

На самом деле можно брать не только инвариантные многочлены, но и всюду абсолютно сходящиеся степенные ряды

Опр Характер Чженя расслоения E

$$ch(E) = \left[\operatorname{tr} e^{\frac{iF}{2\pi}}\right] \in H^{2*}(B)$$

$$F = \begin{pmatrix} -2\pi i x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \exp\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{x_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ch(E) = [e^{x_1} + \dots + e^{x_n}]$$

Утв $ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) + ch(E_2)$

$ch(E_1 \otimes E_2) = ch(E_1)\, ch(E_2)$

▷ $E_1 \quad \nabla^1 \quad F^1 \quad -2\pi i x_i^1$

$E_2 \quad \nabla^2 \quad F^2 \quad -2\pi i x_j^2$

$E_1 \otimes E_2 \quad (\nabla^1 \otimes \nabla^2)(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2 s_2$

$$\Rightarrow F = F^1 \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes F^2$$

$$e_i^1 \otimes e_j^2$$

$$F(e_i^1 \otimes e_j^2) = F^1 e_i^1 \otimes e_j^2 + e_i^1 \otimes F^2 e_j^2 =$$

$$= (-2\pi i x_i^1 - 2\pi i x_j^2)\, e_i^1 \otimes e_j^2$$

$\Rightarrow$ образующие у Фк $E_1 \otimes E_2$ это

$$x_i^1 + x_j^2 \quad \forall i, j$$

$$ch(E_1 \otimes E_2) = \sum_{i,j} e^{x_i^1 + x_j^2} =$$

$$= \sum_{i,j} e^{x_i^1} e^{x_j^2} = \Big(\sum_i e^{x_i^1}\Big)\Big(\sum_j e^{x_j^2}\Big) =$$

$$= ch(E_1)\, ch(E_2)$$

<u>Опр</u> Класс Тодда комплексного расслоения

$$\widehat{S}(E) = \left[\det \frac{\frac{iF}{2\pi}}{1 - e^{-\frac{iF}{2\pi}}}\right]$$