

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 16.06.2020.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее 30 июня. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать pdf, а не jpg, и писать ручкой, а не карандашом.

Большая просьба решать самостоятельно.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач, но возможны ослабления этого критерия в зависимости от общей ситуации со сдачей задач.

Задача 1. Поверхность называется *линейчатой*, если она параметрически задается в виде $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна (5 баллов).

Задача 2. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости (10 баллов).

Задача 3. Доказать, что в любой точке p группы Ли G с биинвариантной метрикой секционная кривизна в направлении любой 2-плоскости в $T_p G$ неотрицательна (10 баллов).

Задача 4. Пусть $[z_0 : \dots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что отображение Веронезе степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \dots : z_n]) = [\dots : z^I : \dots], \quad (1)$$

где z^I это некоторый моном степени d от z_0, \dots, z_n , а в правой части (1) стоят все мономы степени d . Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^* \gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. (10 баллов).

Задача 5. Подмногообразие M риманова многообразия N с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические M являются в то же время и геодезическими N . Доказать, что M вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая. (5 баллов).

Задача 6. Найдите $\text{ch}(\xi_k)$, где ξ_k есть тривиальное расслоение ранга k (5 баллов).

Задача 7. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W , то все числа Понтрягина M , то есть числа Потрягина касательного расслоения TM , равны нулю. (10 баллов).

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.

Задача 8*. Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1), [\mathbb{S}^4] \rangle = \oint_{\mathbb{S}^4} p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1),$$

где $\gamma_{\mathbb{H}}^1 = (E \rightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция о веществления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) (25 баллов).