# Лекция 9 — связности в расслоениях

Дифференциальная геометрия

Независимый московский университет

Лекция 9 — 7 апреля 2020 года

# План

# Алгебра дифференциальных форм

- $\Omega^p(U)$ — пространство гладких дифференциальных форм степени p на открытом подмножестве U гладкого многообразия M.
- $\Omega(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \Omega^p(U)$ — пространство всех гладких дифференциальных форм на U.
- Если $U = M$ то получаем пространства глобальных форм $\Omega^p(M)$, $\Omega(M)$.
- $\Omega(U)$ — алгебра над $C^\infty(U)$.

# Два определения внешнего произведения форм

A) $\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{p+q}) =$

$$= \sum_{(p,q)-\text{перетасовки } \pi} (\mathsf{sgn}\, \pi) \alpha(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) \beta(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)})$$

где $(p, q)$-перетасовка — это такая перестановка $\pi \in S_{p+q}$, что

$$\pi(1) < \pi(2) < \dots < \pi(p), \quad \pi(p+1) < \pi(p+2) < \dots < \pi(p+q).$$

B) $\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{p+q}) =$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} (\mathsf{sgn}\, \pi) \alpha(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) \beta(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)}),$$

# Два определения внешнего произведения форм

- Определение A) можно переформулировать и без введения нового термина «перетасовка» следующим образом:

A′) $\alpha \wedge \beta(X_1, \ldots, X_{p+q}) =$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} (\mathsf{sgn}\, \pi) \alpha(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(p)}) \beta(X_{\pi(p+1)}, \ldots, X_{\pi(p+q)}).$$

# Два определения внешнего произведения форм

- Проще всего увидеть разницу между двумя определениями в случае 1-форм:

A) $\alpha \wedge \beta(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$,

B) $\alpha \wedge \beta(X, Y) = \dfrac{1}{2}(\alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X))$.

- Наш выбор — определение A)

# Соглашения и обозначения

- $\mathrm{M}$ — гладкое многообразие,
- $\tau_{\mathrm{M}} = (\mathrm{TM}, \pi, \mathrm{M})$ — его касательное расслоение,
- $\xi = (\mathrm{E}, \mathrm{p}, \mathrm{M})$ — гладкое векторное расслоение над $\mathrm{M}$ со слоем $\mathrm{V}$, который является векторным пространством над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.
- $\tau_{\mathrm{M}}^*$ — кокасательное расслоение $(\mathrm{T^*M}, \pi, \mathrm{M})$.
- Проекции в касательном и кокасательном расслоении мы обозначим одной и той же буквой $\pi$.
- Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то нам понадобится комплексификация кокасательного расслоения $(\tau_{\mathrm{M}}^*)_{\mathbb{C}} = \tau_{\mathrm{M}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
- Напомним, что кокасательное расслоение также обозначается $\mathrm{T^*M}$. Его комплексификацию мы будем также обозначать $\mathrm{T^*M} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

# Определение связности

- Связностью (или ковариантной производной) в гладком векторном расслоении $\xi$ называется
- в вещественном случае: $\mathbb{R}$-линейное отображение

$$\nabla : \Gamma(\mathrm{U}, \xi) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{U}, \tau^*_{\mathrm{M}} \otimes \xi) = \Gamma(\mathrm{U}, \mathrm{T}^*\mathrm{M} \otimes \xi),$$

- в комплексном случае: $\mathbb{C}$-линейное отображение

$$\nabla : \Gamma(\mathrm{U}, \xi) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{U}, (\tau^*_{\mathrm{M}})_{\mathbb{C}} \otimes \xi) = \Gamma(\mathrm{U}, (\mathrm{T}^*\mathrm{M} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes \xi),$$

- заданное для каждого открытого множества $\mathrm{U} \subset \mathrm{M}$, которое

# Определение связности

a) согласовано с операцией ограничения на подмножество, то есть если $V \subset U$, $s \in \Gamma(U, \xi)$, то $(\nabla s)\mid_V = \nabla(s\mid_V)$,

b) удовлетворяет тождеству Лейбница

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s),$$

где $f \in C^\infty(U)$ гладкая $\mathbb{K}$-значная функция на $M$, а $s \in \Gamma(U, \xi)$ гладкое сечение расслоения $\xi$ над $U$.

# Определение связности

- Результат применения $\nabla s$ к векторному полю $X$ на $U$ (обозначаемый $\nabla_X s$) является сечением $\xi$. Операция

$$\nabla_X : \Gamma(U, \xi) \longrightarrow \Gamma(U, \xi)$$

определена для любого открытого $U \subset M$, и имеются:

a) согласованность с операцией ограничения:

$$(\nabla_X s)\,|_V = \nabla_{X|_V}(s\,|_V), \quad \text{где } s \in \Gamma(U, \xi), X \in \Gamma(U, TM), V \subset U,$$

b) $\mathbb{K}$-линейность по $s$:

$$\nabla_X(as_1 + bs_2) = a\nabla_X s_1 + b\nabla_X s_2, \quad \text{где } a, b, \in \mathbb{K},$$

c) $C^\infty(U)$-линейность по $X$:

$$\nabla_{(fX_1+gX_2)}s = f\nabla_{X_1}s + g\nabla_{X_2}s, \quad \text{где } f, g \in C^\infty(U),$$

d) тождество Лейбница:

$$\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s, \quad \text{где } f \in C^\infty(U).$$

# Локальные коэффициенты связности

- $\xi = (E, p, M)$ — гладкое векторное расслоение,
- $U$ — тривиализующая окрестность,
- $e_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, \mathsf{rk}\,\xi$, — базис в сечениях.
- Гладкое сечение $s$ можно записать в этом базисе в виде $s(x) = s^\alpha(x) e_\alpha$, где $s^\alpha$ гладкие функции.
- Тогда получаем

$$\nabla s = \nabla(s^\alpha e_\alpha) = ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \nabla(e_\alpha).$$

- Как мы видим, 1-формы со значениями в сечениях $\nabla(e_\alpha)$ полностью определяют связность.

# Локальные коэффициенты связности

- Запишем их в базисе $\mathrm{e}_\alpha$:

$$\nabla(\mathrm{e}_\alpha) = \omega_\alpha^\beta \otimes \mathrm{e}_\beta,$$

- тогда $\omega_\alpha^\beta$ являются просто 1-формами на U,

$$\nabla \mathrm{s} = \mathrm{ds}^\alpha \otimes \mathrm{e}_\alpha + \mathrm{s}^\alpha \nabla(\mathrm{e}_\alpha) = \mathrm{ds}^\alpha \otimes \mathrm{e}_\alpha + \mathrm{s}^\alpha \omega_\alpha^\beta \otimes \mathrm{e}_\beta.$$

- Переименуем во втором слагаемом индексы суммирования $\alpha$ в $\beta$, а $\beta$ в $\alpha$, вынесем $\mathrm{e}_\alpha$ за скобки, тогда мы получим:

$$\nabla \mathrm{s} = (\mathrm{ds}^\alpha + \mathrm{s}^\beta \omega_\beta^\alpha) \otimes \mathrm{e}_\alpha.$$

# Локальные коэффициенты связности

- 1-формы $\omega_\alpha^\beta$ образуют матрицу 1-форм $\omega$, которая является матрицей в базисе $\mathrm{e}_\alpha$ оператора, отображающего $\mathrm{E_x}$ в $\mathrm{E_x}$. Будем обозначать этот оператор той же буковой $\omega$.
- Таким образом, $\omega$ является 1-формой со значениями в эндоморфизмах слоя, то есть $\omega \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathrm{T^*M} \otimes \mathsf{End}(\xi))$, или $\omega \in \Gamma(\mathrm{U}, (\mathrm{T^*M} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes \mathsf{End}(\xi))$ в комплексном случае. Заметим, что так как $\mathsf{End}\,\mathrm{V} = \mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^*$, то ясно как конструировать расслоение $\mathsf{End}(\xi)$ из $\xi$ в терминах склеивающих коциклов.
- Локально (!), в окрестности U, связность задаётся 1-формой со значениями в эндоморфизмах слоя.

# Локальные коэффициенты связности

- Запишем $(\nabla s)^\alpha = ds^\alpha + \omega^\alpha_\beta s^\beta$. в матричном виде.
- Рассмотрим координаты $s^\alpha$ сечения s в базисе $e_\alpha$, записанные в виде столбца, который мы обозначим через $[s]$,

$$[s] = \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

- Тогда мы получаем «матричную» формулу

$$[\nabla s] = d[s] + \omega[s],$$

# Локальные коэффициенты связности

- Здесь $[\nabla s]$ столбец координат 1-формы со значениями в сечениях $\nabla s$ в базисе $e_\alpha$, $d[s]$ столбец из 1-форм полученный покомпонентным применением $d$ к $[s]$,

$$[\nabla s] = \begin{pmatrix} (\nabla s)^1 \\ (\nabla s)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad d[s] = \begin{pmatrix} ds^1 \\ ds^2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

  а $\omega[s]$ произведение матрицы $\omega$ на столбец $[s]$, причём компоненты матрицы равны $\omega^\alpha_\beta$, и мы придерживаемся соглашения о том, что это элемент в строке номер $\alpha$ и столбце номер $\beta$.

# Локальные коэффициенты связности

- Как записывается ковариантная производная $\nabla_X$ вдоль векторного поля X? Пусть тривиализующая окрестность U одновременно координатная окрестность на M с локальными координатами $x^i$.
- Тогда $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ и мы получаем

$$\nabla_X s = (ds^\alpha(X) + s^\beta \omega^\alpha_\beta(X)) e_\alpha = \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(s^\alpha) + s^\beta \omega^\alpha_\beta \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) e_\alpha.$$

- Так как $\omega^\alpha_\beta$ является 1-формой, то $\omega^\alpha_\beta \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = X^i \omega^\alpha_\beta \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$.
- Определим $\omega_{i,\beta}^{\ \alpha} = \omega^\alpha_\beta \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$, тогда

$$\nabla_X s = X^i \left( \frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + \omega_{i,\beta}^{\ \alpha} s^\beta \right) e_\alpha.$$

# Локальные коэффициенты связности

- Функции $\omega_{i,\beta}^{\ \alpha}$ являются на самом деле координатами 1-формы $\omega_\beta^\alpha$ в локальном базисе 1-форм $dx^i$:
$$\omega_\beta^\alpha = \omega_{i,\beta}^{\ \alpha}\, dx^i.$$
- Вместо базиса $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ можно выбрать любой базис $\varepsilon_i$ в векторных полях. Тогда $X = X^i \varepsilon_i$ и
$$\nabla_X s = \left( X^i \varepsilon_i(s^\alpha) + s^\beta X^i \omega_\beta^\alpha(\varepsilon_i) \right) e_\alpha.$$
- Если записать 1-форму $\omega_\beta^\alpha$ в базисе в пространстве 1-форм $\varepsilon^i$, дуальном к базису $\varepsilon_i$, $\omega_\beta^\alpha = \omega_{i,\beta}^{\ \alpha} \varepsilon^i$, то формула для ковариантной производной принимает вид
$$\nabla_X s = X^i \left( \varepsilon_i(s^\alpha) + \omega_{i,\beta}^{\ \alpha} s^\beta \right) e_\alpha.$$

# Локальные коэффициенты связности

- Определение. Функции ${\omega_{i,\beta}}^{\alpha}$ называются локальными коэффициентами связности $\nabla$.
- В случае касательного расслоения $\xi = TM$ эти функции ${\omega_{i,\beta}}^{\alpha}$ традиционно называются символами Кристоффеля и обозначаются $\Gamma^{\alpha}_{i\beta}$.
- Форма со значениями в эндоморфизмах слоя $\omega$ называется локальной 1-формой связности.

# Замечание про индексы

- Мы придерживаемся следующего соглашения.
- Индексы, обозначенные латинскими буквами, как $\mathrm{i}$ в $\omega_{\mathrm{i},\beta}^{\alpha}$, соответствуют касательным векторным полям и пробегают от 1 до размерности базы $\operatorname{dim} \mathrm{M}$.
- Индексы, обозначенные греческими буквами, как $\alpha$ и $\beta$ в $\omega_{\mathrm{i},\beta}^{\alpha}$, соответствуют сечениям и пробегают от 1 до ранга расслоения $\operatorname{rk} \xi$.

# Линейность по векторному полю

- Обратим внимание на тот факт, что в формулу для $\nabla_X s$ входят координаты $X^i$ векторного поля $X$, но не их производные. Это значит, что значение сечения $\nabla_X s$ в точке $x$ зависит от значения векторного поля $X$ только в этой точке.
- Ковариантную производную можно рассматривать как отображение

$$\nabla : T_x M \times \Gamma(U, \xi) \longrightarrow \xi_x,$$

где $U$ окрестность точки $x$, а $\xi_x$ слой расслоения $\xi$ над точкой $x$.

# Связности и замена базиса

- Определение локальных коэффициентов связности $\nabla(\mathrm{e}_\alpha) = \mathrm{e}_\beta \omega^\beta_\alpha$ удобно записать в матричном виде, введя строку $\mathrm{e} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots)$ из базисных сечений $\mathrm{e}_\alpha$:
$$\nabla \mathrm{e} = \mathrm{e}\omega.$$
- Пусть $\mathrm{T}$ матрица перехода от базиса $\mathrm{e}_\alpha$ к новому базису $\tilde{\mathrm{e}}_\alpha$, то есть
$$\tilde{\mathrm{e}} = \mathrm{e}\mathrm{T}.$$
Тогда матрица $\tilde{\omega}$ в новом базисе выражается через $\omega$ по формуле
$$\tilde{\omega} = \mathrm{T}^{-1} \cdot \omega \cdot \mathrm{T} + \mathrm{T}^{-1} \cdot d\mathrm{T}.$$

# Продолжение связности на $\xi$-значные формы

- Рассмотрим расслоение $\wedge^k \tau_M^* \otimes \xi = \wedge^k T^*M \otimes \xi$, если $\xi$ вещественное расслоение, или $\wedge^k(\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes \xi = \wedge^k(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes \xi$, если $\xi$ комплексное расслоение.
- На сечения расслоения $\wedge^k \tau_M^* \otimes \xi = \wedge^k T^*M \otimes \xi$ можно смотреть как на k-формы со значениями в сечениях расслоения $\xi$. Если $X_1, \dots, X_k$ векторные поля на M, то значение такого сечения $s \in \Gamma(M, \wedge^k T^*M \otimes \xi)$ на этих векторных полях $s(X_1, \dots, X_k)$ является обычным сечением $\xi$.

# Продолжение связности на $\xi$-значные формы

- Обозначим пространство k-форм со значениями в сечениях $\xi$ через $\Omega^k(U,\xi)$, то есть
$$\Omega^k(U,\xi)=\Gamma(U,\wedge^k T^*M\otimes\xi),$$
$\Omega^0(U,\xi)=\Gamma(U,\xi)$ есть просто пространство гладких сечений над U.
- Определение. Пусть $\xi$ векторное расслоение. Элемент пространства сечений
  $\Omega^k(U,\xi)=\Gamma(U,\wedge^k T^*M\otimes\xi)$, если $\xi$ вещественное расслоение, или
  $\Omega^k(U,\xi)=\Gamma(U,\wedge^k(T^*M\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\otimes\xi)$, если $\xi$ комплексное расслоение,

  называется k-формой на U со значениями в сечениях расслоения $\xi$ или просто $\xi$-значной k-формой на U. Пространство $\xi$-значных форм всех степеней обозначается через $\Omega(U,\xi)$.

# Продолжение связности на $\xi$-значные формы

- Напомним, что элементы тензорного произведения $\mathrm{U} \otimes \mathrm{V}$ вида $\mathrm{u} \otimes \mathrm{v}$, где $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$, $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$, называются разложимыми элементами тензорного произведения.
- Так как любой элемент тензорного произведения является суммой разложимых элементов, то линейное отображение из тензорного произведения однозначно определяется своими значениями на разложимых элементах.

# Продолжение связности на $\xi$-значные формы

- Заметим, что $\Omega(U,\xi)$ является $\Omega(U)$-модулем. Умножение на формы легко определить для разложимых $\xi$-значных форм формулой

$$\omega \wedge (\theta \otimes s) = (\omega \wedge \theta) \otimes s,$$

где $\omega \in \Omega(U)$, $\theta \otimes s \in \Omega(U,\xi)$, $\theta \in \Omega(U)$, $s \in \Gamma(U,\xi)$, а далее продлить по линейности на все $\xi$-значные формы. В то же время, умножать две $\xi$-значные формы невозможно.

- Заметим, что на связность $\nabla$ можно смотреть как на отображение

$$\Omega^0(U,\xi) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(U,\xi).$$

# Продолжение связности на $\xi$-значные формы

- Мы определяем продолжение связности на произвольные $\xi$-значные k-формы

$$\Omega^{\mathrm{k}}(\mathrm{U},\xi) \xrightarrow{\nabla} \Omega^{\mathrm{k}+1}(\mathrm{U},\xi)$$

на разложимых формах по правилу Лейбница

$$\nabla(\theta \otimes \mathrm{s}) = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{s} + (-1)^{\deg \theta}\theta \wedge \nabla \mathrm{s},$$

где $\theta \in \Omega^{\mathrm{k}}(\mathrm{U})$, $\deg \theta = \mathrm{k}$ степень $\theta$, а s гладкое сечение, а потом продлеваем по линейности на все k-формы.

# Пространство связностей

- Пусть $\nabla^1$ и $\nabla^2$ две связности на расслоении $\xi$. Тогда из определения связности (если быть точным, из тождества Лейбница) следует, что разность $\nabla^1 - \nabla^2$ коммутирует с умножением на функции:

$$(\nabla^1 - \nabla^2)(fs) = (\nabla^1(fs) - \nabla^2(fs)) =$$

$$= df \otimes s + f\nabla^1 s - df \otimes s - f\nabla^2 s = f(\nabla^1 - \nabla^2)s.$$

- Но это значит, что разность двух связностей является $C^\infty(M)$-линейной по s, то есть является применением к сечению некоторой 1-формы $\theta$ со значениями в эндоморфизмах $\xi$:

$$\nabla^1 - \nabla^2 = \theta \in \Gamma(M, T^*M \otimes \mathsf{End}(\xi)) = \Omega^1(M, \mathsf{End}(\xi)).$$

# Пространство связностей

- Утверждение. Пространство связностей в расслоении $\xi$ является аффинным пространством, ассоциированным векторным пространством которого является пространство 1-форм со значениями в эндоморфизмах $\Omega^1(M, \mathsf{End}(\xi))$.

# Снова о локальной 1-форме связности

- Тривиальное расслоение $\eta = (\mathrm{M} \times \mathrm{V}, \mathsf{pr}_1, \mathrm{M})$.
- Его сечения можно отождествить с отображениями $\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{V}$, то есть с векторнозначными функциями, $\Gamma(\mathrm{M}, \eta) \cong \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{V})$.
- На функциях из $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{V})$ действует оператор внешнего дифференцирования $\mathrm{d}$, после выбора базиса и отождествления $\mathrm{V} \cong \mathbb{R}^\mathrm{n}$ это просто покомпонентное внешнее дифференцирование.
- Таким образом, в силу этого отождествления, внешний дифференциал $\mathrm{d}$ можно рассматривать как отображение
$$\mathrm{d} : \Gamma(\mathrm{M}, \eta) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{M}, \mathrm{T}^*\mathrm{M} \otimes \eta).$$
- Легко проверить, что понимаемый в таком смысле оператор внешнего дифференцирования $\mathrm{d}$ удовлетворяет всем условиям, которым должна удовлетворять связность.

# Снова о локальной 1-форме связности

- Пусть теперь $\nabla$ произвольная связность в этом тривиальном расслоении. Тогда $\nabla - \mathrm{d} = \omega$, где $\omega$ есть 1-форма со значениями в эндоморфизмах, то есть, отождествляя сечения с V-значными функциями, мы получаем формулу

$$\nabla = \mathrm{d} + \omega.$$

- Заметим, что, ввиду тривиальности расслоения, пространство 1-форм со значениями в эндоморфизмах $\Omega^1(\mathrm{M}, \mathsf{End}(\mathrm{M} \times \mathrm{V}))$ может быть естественно отождествлено с пространством 1-форм со значениями в векторном пространстве $\mathsf{End}\,\mathrm{V}$, которое естественно обозначить $\Omega^1(\mathrm{M}, \mathsf{End}\,\mathrm{V})$. Но это в точности то же описание, что мы уже дали ранее.

# Снова о локальной 1-форме связности

- Мы часто будем пользоваться формулой $\nabla = \mathrm{d} + \omega$, поэтому важно хорошо освоиться с ней.