Лекция 1. Модули над кольцами-1

Понятие модуля над кольцом главные примеры:
$\mathbb{Z}$-модули $\leftrightarrow$ абелевы группы,
$\Bbbk[x]$-модуль $\leftrightarrow$ $\Bbbk$-линейный оператор. Неприводимые, неразложимые модули, ряд Жордана-Гёльдера.

Семинар 1. Модули над кольцом

Задача 1.1. **(а)** Постройте соответствие между модулями над кольцом гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ и следующими парами: абелева группа A и автоморфизм $\varphi \in Aut(A)$ такой, что $\forall a \in A$ выполнено $\varphi(\varphi(a)) = a^{-1}$.

(б) Опишите все $\mathbb{Z}[i]$-модули из $\leqslant 5$ элементов с точностью до изоморфизма.

Задача 1.2. Постройте изоморфизмы между
(а) $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}))$ и $\mathbb{Z}/(d\mathbb{Z})$, где $d := (m, n)$ – наибольший общий делитель чисел m и n;
(б) $Hom_{\Bbbk[x]}(\Bbbk[x]/(f(x)), \Bbbk[x]/(g(x)))$ и $\Bbbk[x]/(d(x))$, где $d(x) = (f(x), g(x))$.
(в) $Aut_{\mathbb{Z}}(\underbrace{\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})}_{d})$ и $GL_d(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}))$ – множеством матриц порядка d, чей определитель принадлежит группе $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})^*$, т.е. является остатком взаимнопростым с n.

Задача 1.3. Говорят, что последовательность отображений R-модулей

$$\ldots A_{i-1} \stackrel{d_{i-1}}{\to} A_i \stackrel{d_i}{\to} A_{i+1} \stackrel{d_{i+1}}{\to} \ldots$$

таких что $d_i \circ d_{i-1} = 0\ \forall i$ точна, если $\ker(d_i) = Im(d_{i-1})$ для все i.

Докажите, что для любого R-модуля M и короткой точной последовательности R-модулей

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

соответствующие последовательности R-гомоморфизмов из M точна слева, то есть точна последовательность:

$$0 \to Hom_R(M, A) \to Hom_R(M, B) \to Hom_R(M, C)$$

и последовательность R-гомоморфизмов из M точна справа, то есть точна последовательность

$$Hom_R(A, M) \leftarrow Hom_R(B, M) \leftarrow Hom_R(C, M) \leftarrow 0$$

Приведите примеры $\mathbb{Z}$-модулей, показывающие, что с других концов точность не всегда имеет место быть.

Задача 1.4. (Нетеровы модули) Докажите, что следующие условия на R-модуль M эквивалентны:
(а) Любой подмодуль $N \subset M$ – конечнопорождён,
(б) Для любой возрастающей цепочки подмодулей $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots$ найдется такое натуральное n, что $N_n = N_m\ \forall m \geqslant n$.

Задача 1.5. Пусть $N \subset M$ пара вложенных R-модулей. Верно ли, что
(а) если подмодуль N и фактормодуль M/N конечнопорожденные, то M – конечнопорожденный;
(б) если M – конечнопорожденный, то N и M/N – конечнопорожденные;[1]
(в) если M – нетеров, то N и M/N тоже нетеровы;
(г) если N и M/N – нетеровы, то M – нетеров.

Лекция 2. $\mathbb{Z}$-Модули

Ранг свободного модуля. Задание модуля образующими и соотношениями. $\mathbb{Z}$-модули, Классификация абелевых групп.

---
[1] Указание: рассмотрите кольцо $R = \Bbbk[x_1, x_2, \ldots]$ и $M = R$

Семинар 2. $\mathbb{Z}$-модули = абелевы группы

Задача 2.1. Группа A задана 4-мя образующими $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и 4-мя соотношениями

$$52a_1 + 32a_2 + 120a_3 + 50a_4 = 2a_1 - 8a_2 + 10a_3 = -10a_2 + 10a_3 = 50a_1 + 50a_2 + 100a_3 + 50a_4 = 0$$

(а) Разложите G в прямую сумму циклических,
(б) Разложите G в прямую сумму примарных циклических.
(в) Чему равен максимальный возможный порядок её элементов?
(г) Вычислите порядок элемента $a = 53a_1 + 32a_2 + 121a_3 + 50a_4$ в группе A.

Задача 2.2. Найдите минимально возможное число образующих абелевой группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

Задача 2.3. *(Обратная к теореме Лагранжа для абелевых групп)* Пусть A – конечная абелева группа и n делит $|A|$. Докажите, что в A есть подгруппа порядка n.

Задача 2.4. Пусть E – подгруппа $\mathbb{Z}^n$, порожденная набором целочисленных векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$. Покажите, что

(а) определитель матрицы Грамма $\det(\langle e_i, e_j \rangle)$ равен квадрату порядка факторгруппы $\mathbb{Z}^n/E$ в случае, если оба этих числа конечны и отличны от нуля.

(б) количество промежуточных абелевых подгрупп $E \subset F \subset \mathbb{Z}^n$ конечно тогда и только тогда, когда векторы $e_1, \ldots, e_n$ – образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

(в) множество векторов $f \in \mathbb{R}^n$, таких что $\langle f, e_i \rangle \in \mathbb{Z}$ для всех i, образует свободную конечно порожденную абелеву группу ранга n, при условии, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ – образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

Указание: Вспомните понятие двойственного базиса.

Задача 2.5.

(а) Модуль называется простым, если у него нет нетривиальных подмодулей. Опишите конечно порождённые простые $\mathbb{Z}$-модули.

(б) Модуль L называется полупростым, если для любого подмодуля $M \subset L$ существует дополнительный подмодуль N, т.е. такой, что $L = M \oplus N$. Опишите конечно порождённые полупростые $\mathbb{Z}$-модули.

(в) Модуль называется неразложимым, если его нельзя представить в виде суммы двух подмодулей. Опишите конечно порождённые неразложимые $\mathbb{Z}$-модули.

Лекция 3. Модули над кольцами-3

Модули над кольцами главных идеалов.
Линейные операторы, Фробениусова нормальная форма операторов,

Семинар 3. $\Bbbk[x]$-модули = Пространства с оператором

Задача 3.1. Докажите, что некоторая степень минимального многочлена матрицы делится на его характеристический.

Задача 3.2. Пусть у обратимой матрицы A минимальный многочлен $p(\lambda)$ совпадает с характеристическим. Чему может быть равен минимальный многочлен матрицы A^{-1}?

Задача 3.3.

(а) Покажите, что если минимальный многочлен комплексной матрицы не имеет кратных корней, то матрица A – диагонализуема.

(б) Пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ – гомоморфизм конечной группы G в группу обратимых преобразований пространства $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $\forall g \in G$ матрица $\varphi(g)$– диагонализуема.

(в) Опишите фробениусову нормальную форму операторов, в квадрате равных себе.

Задача 3.4. Найти условие, при котором диагонализуема вещественная матрица с числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на побочной диагонали и нулями на всех остальных местах

(а) над полем вещественных чисел, **(б)** над полем комплексных чисел.

Задача 3.5.

(а) Вспомните неприводимые многочлены степеней 2 и 3 над $\mathbb{F}_2$ и опишите все неразложимые $\mathbb{F}_2[x]$-модули размерности $\leqslant 3$.

(б) Опишите классы сопряженности (=фробениусовы нормальные формы) операторов из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.

(в) Опишите цикловые типы образов классов сопряженности при вложении $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) \to S_7$, построенному по действию группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ на множестве из 7 ненулевых векторов в $\mathbb{F}_2^3$.

(г)* Вычислите порядки всех классов сопряженности и докажите, что группа $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ – проста. *Указание:* Иногда проще описать централизатор класса сопряженности в $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, сравнив его с соответствующим централизатором в S_7.

Лекция 4. ЖНФ и полупростотые модули

минимальный и характеристический многочлены.
Полупростотые операторы и полупростые модули.
Жорданова Нормальная форма.
Функции от операторов.

Семинар 4. Жорданова Нормальная Форма

Задача 4.1.

(а) Зная жорданову нормальную форму линейного оператора, найдите его минимальный многочлен.

(б) Найдите характеристический и минимальный многочлены матриц $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Подобны ли эти матрицы?

(в) Докажите, что 3×3 матрицы подобны тогда и только тогда, когда их характеристический и минимальный многочлены совпадают. Верно ли это для матриц $n \times n$ при $n > 3$?

Задача 4.2. Найдите

(а) ЖНФ и жорданов базис матрицы над полем $\mathbb{C}$ у матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(б) какие простые и с какой кратностью входят в $\mathbb{C}[x]$-модуль $V = \mathbb{C}^5$, в котором x действует матрицей A;

(в) A^{100} и $\exp(A)$.

Задача 4.3. Назовем вещественный (соотв. комплексный) линейный оператор *полупростым*, если его минимальный многочлен не имеет кратных комплексных корней. Докажите, что

(а) вещественный полупростой оператор A диагонализуем над $\mathbb{C}$ и раскладывается в прямую сумму двумерных и одномерных вещественных A-инвариантных подпространств.
Сравните данное определение полупростоты с тем, что было на лекции.

(б) ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство – полупростой оператор.

(в) семейство коммутирующих комплексных полупростых операторов можно одновременно диагонализовать в некотором базисе.

(г) сумма двух коммутирующих вещественных полупростых операторов – полупростой оператор.

(д)* Докажите, что полупростые операторы плотны в пространстве всех операторов (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Выведите из этого теорему Гамильтона-Кэли.

Задача 4.4. Пусть $A = A_s + A_n$ – разложение Жордана оператора A (над $\mathbb{C}$) в сумму полупростого и нильпотентного оператора.

(а) Докажите, что существуют многочлены $p(x), q(x)$ без свободного члена такие, что $A_s = p(A), A_n = q(A)$.

Отсюда следует, что A_s, A_n коммутируют с любым линейным оператором, коммутирующим с A.

(б) Докажите, что любой оператор, коммутирующий с любым оператором, коммутирующим с A имеет вид $f(A)$ для некоторого многочлена $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Лекция 5. (косо)эрмитовы произведения и операторы

Эрмитово и косоэрмитово скалярное произведение,
Собственные значения (косо)эрмитовых операторов,
Унитарные матрицы и их собственные значения,
LU-разложение,

Семинар 5. Эпиморфизм $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3$

Через SU_2 обозначим группу унитарных матриц 2×2 с определителем 1. Соответственно, SO_3 — это группа (вещественных) ортогональных матриц 3×3 с определителем 1.

Задача 5.1. Докажите, что всякая матрица из SU_2 имеет вид $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z}\end{pmatrix}$, где $|z|^2+|w|^2=1$.

Задача 5.2.

(а) Опишите жорданову и фробениусову нормальные формы элементов групп SO_3 и SU_2.

(б) Докажите, что всякий элемент из группы SO_3 есть вращение ℓ_φ вокруг некоторой оси ℓ на некоторый угол φ.

Задача 5.3. Покажите, что эрмитовы матрицы со следом нуль образуют трёхмерное векторное пространство V над $\mathbb{R}$, форма $(X,Y)=\operatorname{tr} XY$ задаёт на нём структуру евклидова пространства, а матрицы Паули $e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$ образуют в V ортогональный базис.

Задача 5.4. Для любого элемента $u\in U_2$ определено отображение $R_u\colon V\to V$, $R_u(X)=uXu^{-1}$. Покажите, что R_u — ортогональный оператор, а соответствие $u\to R_u$ задаёт гомоморфизм $R\colon U_2\to O_3$.

Задача 5.5.

(а) *(Теорема Эйлера).* Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный репер $Oxyz$. Докажите, что любое вращение ℓ_φ есть композиция $Z_\gamma X_\beta Z_\alpha$ вращений вокруг Oz, Ox, Oz на углы α, β, γ соответственно.

(б) Пусть $u_\varphi=\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}$, $v_\psi=\begin{pmatrix}\cos\frac{\psi}{2} & -\sin\frac{\psi}{2}\\ \sin\frac{\psi}{2} & \cos\frac{\psi}{2}\end{pmatrix}$. Проверьте, что $R_{u_{\varphi/2}}=X_\varphi$, $R_{v_{\psi/2}}=Z_\psi$. Выведите отсюда, что каждый элемент SO_3 имеет прообраз из SU_2.

(в) Покажите, что при гомоморфизме R группа SU_2 отображается в точности на SO_3, и опишите ядро построенного гомоморфизма $R:\mathrm{SU}_2\to\mathrm{SO}_3$.

Лекция 6. Симметрические многочлены-1

Основная теорема о симметрических многочленах, Дискриминант,

Семинар 6. Симметрические многочлены

Элементарной симметрической функцией $e_k(x_1,\dots,x_n)$ называется $\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\dots x_{i_k}$.
Соответственно, полной симметрической функцией $h_k(x_1,\dots,x_n)$ называется $\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n} x_{i_1}\dots x_{i_k}$.

Задача 6.1. Пусть $E(t)=\sum_{k=0}^n e_k(x_1,...,x_k)t^k$ и $H(t)=\sum_{k=0}^n h_k(x_1,...,x_k)t^k$.

(а) Покажите, что $E(t)=\prod_{i=1}^n(1+x_it)$;

(б) Покажите, что $H(t)=\prod_{i=1}^n(1-x_it)^{-1}$;

(в) Докажите, $E(-t)H(t)=1$;

(г) Докажите, что $e_k-h_1e_{k-1}+h_2e_{k-2}-\ldots+(-1)^kh_k=0$ для каждого $1\leqslant k\leqslant n$.

Задача 6.2.

(а) Докажите, что дискриминант многочлена 4-ой степени x^4+px+q является целочисленной линейной комбинацией чисел p^4 и q^3;

(б) Вычислите соответствующий дискриминант, подставив несколько удобных значений для p и q, и решив подходящую систему линейных уравнений.

Задача 6.3. Известно, что характеристический многочлен 4×4-матрицы A равен $t^4+a_2t^2+a_1t+a_0$. Вычислите характеристический многочлен матрицы

(а) A^{-1}, **(б)** A^2.

Задача 6.4. Докажите, что

(а) комплексная матрица A – нильпотентна тогда и только тогда когда $\operatorname{tr} A^k=0$ для любого $k>0$.

(б) комплексные матрицы A и B порядка n имеют одинаковые характеристические многочлены если и только если $\operatorname{tr} A^k=\operatorname{tr} B^k$ для $k=1,\dots,n$.

(в) полупростые операторы плотны в пространстве всех операторов (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

(г) полиномиальная функция на матрицах однозначно восстанавливается своими значениями на полупростых матрицах. Выведите отсюда теорему Гамильтона-Кэли.

Лекция 7. Симметрические многочлены-1

Комбинаторика производящих функций,
Основная теорема алгебры (док-во с помощью симметрических функций)
Результант.

Семинар 7. Симметрические многочлены, продолжение

Задача 7.1. Разбиением длины m числа n называется набор λ целых положительных чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m > 0$ и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = n$.

Пусть $p(n)$ – число разбиений числа n, соответственно $p(n, m)$ – число разбиений числа n длины не превосходящей m. Докажите, что

(а) $\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n$; **(б)** $\prod_{i=1}^{m}(1-t^i)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,m)t^n$.

Задача 7.2. Докажите соотношения и тождества между элементарными симметрическими функциями $e_k := \sum_{i_1<\ldots<i_k} x_{i_1}\ldots x_{i_k}$ и степенными суммами Ньютона: $p_k := \sum_i x_i^k$:

(а) (*Формулы Ньютона*)

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} e_{k-1} p_1 + (-1)^k k p_k = 0.$$

Детерминантные формулы:

(б) $p_k = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \ldots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \ldots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}$; **(в)** $k!e_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \ldots & p_1 & k-1 \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \ldots & p_2 & p_1 \end{vmatrix}$;

Задача 7.3.

(а) Дайте определение кососимметрического многочлена от n переменных и докажите, что определитель Вандермонда $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ является таковым.

(б) Докажите, что всякий кососимметрический является произведением Вандермонда и симметрического.

(в) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – симметрический многочлен, равный 0, при $x_i = x_j$ для некоторой пары индексов $i < j$. Докажите, что $f(x_1, \ldots, x_n) = \Delta^2 g(x_1, \ldots, x_n)$ для некоторого симметрического многочлена $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 7.1. *Для каждого набора целых неотрицательных чисел* $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *определим многочлен* $a_\alpha := \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & \ldots & x_n^{\alpha_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\alpha_n} & \ldots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$. *В частности, если* $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, *то* a_δ *– это определитель Вандермонда* Δ.

Задача 7.4. Докажите, что **(а)** $a_{\sigma(\alpha)} = (-1)^\sigma a_\alpha$ для $\sigma \in \mathbb{S}_n$;

(б) множество многочленов a_α образуют базис в векторном пространстве кососимметрических многочленов, если из этого набора выкинуть все пропорциональные и равные нулю многочлены.

(в) множество многочленов Шура $s_\lambda := a_{\lambda+\delta}/a_\delta$, где $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n)$ – разбиение длины не больше n, образует базис в пространстве симметрических многочленов.

(г) $e_n = s_{(1,\ldots,1)}$; **(д)** $h_n = s_{(n,0,\ldots,0)}$.

Задача 7.5. Зафиксируем натуральное число n и пусть $\Xi := \{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\}$ – множество примитивных корней из 1 степени n.

(а) Покажите, что $p_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \in \mathbb{Z}$ для всех m;

(б) Покажите, что круговой многочлен $\Phi_n(x) := \prod_{i=1}^{k}(x - \zeta_i)$ может быть определен индуктивно

$$\Phi_n(x) := \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n} \Phi_d(x)},$$

выведите отсюда, что $e_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \in \mathbb{Z}$.

(в) Вычислите результант многочленов $\frac{x^n-1}{x-1}$ и $\frac{x^m-1}{x-1}$;

(г)* Вычислите результант $x^n - 1$ и кругового многочлена $\Phi_m(x)$.

Лекция 8. Тензорная алгебра и теория категорий

тензорное произведение – универсальное и рабоче-крестьянское определения,
Немножко теории категорий: категории, функторы, естественные изоморфизмы.

Семинар 8. Тензорное произведение векторных пространств

Задача 8.1. Пусть векторы $v_1, \ldots, v_d$ – линейно независимы в V. Докажите, что для любого ненулевого векторного пространства W каждое из подпространств $W_i := \langle v_i \rangle \otimes W \subset V \otimes W$ изоморфно W, а их сумма является прямой. Через $\langle v_i \rangle$ обозначено одномерное подпространство в V, натянутое на вектор $v_i \in V$.

Задача 8.2. Пусть U, V - конечномерные векторные пространства. Пусть $A : U \to U, B : V \to V$. Определим оператор

$$A \otimes B : U \otimes V \to U \otimes V, \text{ положив } u \otimes v \mapsto A(u) \otimes B(v).$$

(а) Как связана матрица тензорного произведения операторов с матрицами самих операторов? Найдите $\mathsf{rk}(A \otimes B)$, $\mathrm{Tr}(A \otimes B)$ и $\det(A \otimes B)$, зная ранг, след и определитель операторов A и B.

(б) Докажите, что $A \otimes B$ – диагонализируем, если A и B – диагонализуемы, и выразите собственные значения $A \otimes B$ через собственные значения A и B.

(в) Покажите, что если операторы A и B – нильпотентные, то оператор $A \otimes B$ – нильпотентный.

(г) Пусть $A : U \to U$ и $B : V \to V$ – жордановы клетки. Найдите жорданову форму $A \otimes B$.

(д) Докажите, что $\exp(A \otimes E + E \otimes A) = \exp(A) \otimes \exp(A)$.

(е)* Выразите характеристический многочлен $A \otimes B$ через характеристические многочлены A и B.

Задача 8.3. Пусть $\dim V = k$, $\dim W = m$. Сколько орбит у действия группы $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$

(а) на пространстве отображений $\mathrm{Hom}(V, W)$;

(б) на тензорном произведении пространств $V \otimes W$.

Задача 8.4. Пусть U, V – конечномерные векторные пространства. Известно, что отображение

$$U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V), \ \xi \otimes v \mapsto \xi(v)$$

является каноническим изоморфизмом.

(а) Пользуясь каноническим изоморфизмом запишем операторы $A : U \to V$ и $B : V \to W$ в виде $A = \sum_i \alpha_i \otimes a_i, B = \sum_j \beta_j \otimes b_j$, где $\alpha_i \in U^*, a_i \in V, \beta_j \in V^*, b_j \in W$. Запишите аналогичным образом оператор $BA : U \to W$.

(б) Пусть $e_i \in V, e_i^* \in V^*$ – двойственные базисы. Докажите, что *элемент Казимира* $\sum_i e_i^* \otimes e_i \in V^* \otimes V$ не зависит от выбора базиса.

Задача 8.5. Постройте канонические изоморфизмы

(а) $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$;

(б) $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), W) \simeq \mathrm{Hom}(V, U \otimes W)$;

(в) $\mathrm{End}(V \otimes W) \simeq \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W)$.

Лекция 9. Тензорная алгебра-2

Ещё о естественных изоморфизмах
Функтор расширения скаляров,
Тензорная алгебра,
Задание алгебр образующими и соотношениями

Семинар 9. Тензорное произведение и примеры Функторов

Задача 9.1. Пусть $\mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{R}}$ – категории векторных пространств над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ соответственно. Обозначим за

- $\mathsf{Real} : \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{R}}$ – функтор овеществления, который не меняет векторного пространства, как множество и помнит, как умножать на вещественные числа;

- $\mathsf{Compl} : \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}}$ – функтор комплексификации, сопоставляющий $V \mapsto \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$;

- $\mathsf{Conj} : \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}}$ – функтор комплексного сопряжения ($V \mapsto \bar{V}$), который не меняет векторное пространство, как множество, но изменяет структуру $\mathbb{C}$-векторного пространства: умножение на $\lambda \in \mathbb{C}$ в $\bar{V}$ задается, как умножение на $\bar{\lambda}$ в V.

Проверьте, что перед вами действительно функторы и постройте изоморфизм функторов

$$\mathsf{Compl} \circ \mathsf{Real} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Id} \oplus \mathsf{Conj}.$$

Задача 9.2. Пусть $\Bbbk$ – подполе поля $\mathbb{F}$. Постройте канонические изоморфизмы

(а) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} V, \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} W) \simeq \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$;

(б) $(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} V) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} W) \simeq \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} (V \otimes_{\Bbbk} W)$.

Задача 9.3. Докажите, что

(а) $\mathbb{R}$-алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ не изоморфна матричной алгебре $\mathsf{Mat}_2(\mathbb{R})$;

(б) однако их комплексификации $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ и $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{Mat}_2(\mathbb{R})$ изоморфны матричной алгебре $\mathsf{Mat}_2(\mathbb{C})$, а значит изоморфны друг другу.

Задача 9.4. Обозначим канонический изоморфизм $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$ за F. Докажите, что для тензора $A \in V^* \otimes W$ ранг линейного оператора $F(A) \in \mathrm{Hom}(V, W)$

(а) равен 1 тогда и только тогда, когда тензор A разложим, то есть представляется в виде $\xi \otimes v$ для подходящих $\xi \in V^*$ и $v \in W$;

(б) не превосходит k если и только если тензор A представляется в виде суммы не более чем k разложимых тензоров.

Задача 9.5. Рассмотрим каноническое отождествление для конечномерного векторного пространства V $(\dim V = n)$:

$$\mathrm{Hom}(V, V) \simeq V^* \otimes V \simeq V \otimes V^* \simeq (V^*)^* \otimes V^* \simeq (V^* \otimes V)^* \simeq (\mathrm{Hom}(V, V))^*.$$

Покажите, что связанная с этим отождествлением билинейная форма на пространстве матриц $\mathsf{Mat}_n(\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}(V, V)$ симметрическая и вычислите её в терминах матриц и операторов.

Задача 9.6. Пусть $\dim V = n$. Найдите размерность пространства таких трилинейных форм $\varphi : V \times V \times V \to \Bbbk$, что $\forall\, u, v, w \in V$

(а) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, v)$;

(б) $\varphi(u, u, u) = 0$;

(в) $\varphi(u, u, v) = \varphi(u, v, v)$;

(г) $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$.

Лекция 10. Внешние и симметрические формы и тензоры

алгебра Грассманна

Кососимметричные тензоры и формы.

Симметричные формы и тензоры, отличия в положительной характеристике

Семинар 10. (Косо)симметричные тензоры

Задача 10.1.

(а) Для n-мерного пространства V вычислите размерности пространства симметричных S^kV и кососимметричных тензоров Λ^kV.

(б) Покажите, что $V^{\otimes 3} \supsetneq S^3V \oplus \Lambda^3 V$. и предъявите явно тензор из $V^{\otimes 3}$, который не является суммой симметрического и кососимметрического.

Задача 10.2. С каждым линейным оператором A в (конечномерном) векторном пространстве V свяжем операторы $\Lambda^k A : \Lambda^k V \to \Lambda^k V$ и $S^k A : S^k V \to S^k V$, определённые по правилам

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_k; \quad v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \to Av_1 \cdot \ldots \cdot Av_k.$$

(а) Докажите, что коэффициенты матрицы $\Lambda^k(A)$ в базисе $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ есть миноры матрицы A.

(б) Выразите собственные значения S^kA и Λ^kA через собственные значения диагонализуемого оператора A;

(в) Пусть $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$. Докажите, равенство производящих функций

$$\frac{1}{\det(E - tA)} = \sum_{k \geqslant 0} tr(S^k A)t^k; \quad \det(E + tA) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{tr}(\Lambda^k A)t^k$$

Задача 10.3. Постройте канонический изоморфизм $\oplus_{k=0}^n \Lambda^k(U) \otimes \Lambda^{n-k}(V) \to \Lambda^n(U \oplus V)$.

Задача 10.4. Тензор $w \in \Lambda^2 V$ называется разложимым, если он может быть представлен в виде $u_1 \wedge u_2$. Докажите, что

(а) тензор $w \in \Lambda^2(V)$ разложим если и только если $w \wedge w = 0$;

(б) для любого двумерного подпространства $U \subset V$ тензор $w_U := u_1 \wedge u_2$, построенный по базису $u_1, u_2 \in U$ определен однозначно с точностью до умножения на константу.

Тем самым w_U задает отображение из множества двумерных плоскостей в V (называемых грассманианом $\mathrm{Gr}(2, V)$) в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Построенное отображение называется вложением Плюккера.

(в) Напишите явно уравнение $w_U \wedge w_U = 0$ в координатах $w_U = \sum p_{ij}(U) e_i \wedge e_j$ для $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, задающее вложение Плюккера $Gr(2, \mathbb{C}^4) \hookrightarrow \mathbb{CP}^5$.

Лекция 11. Представления конечных групп-1

Категория G-представлений,
Неразложимые и неприводимые,
Полная приводимость и теорема Машке.

Семинар 11. Представления конечных групп: знакомство

Задача 11.1. Найдите все представления группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

(а) одномерные над $\mathbb{C}, \mathbb{R}$

(б) одномерные над $\mathbb{F}_q$

(в) неприводимые над $\mathbb{C}, \mathbb{R}$

(г)* неприводимые над $\mathbb{F}_q$

Задача 11.2. Пусть V – стандартное двумерное (комплексное) неприводимое представление $\mathbb{S}_3$ (симметриями треугольника). Выберети действие транспозиции (12) и 3-цикла (123) в каком-нибудь базисе в пространствах всех $V^{\otimes 2}$, симметричных $S^2 V$ и кососимметричных $\Lambda^2 V$ тензоров и разложите соответствующие представления в суммы неприводимых.

Задача 11.3. Пусть G – конечная группа. Докажите, что

(а) любое неприводимое представление G конечномерно;

(б) если G – абелева, то неприводимое комплексное представление одномерно,

(в) если (V, ρ) – одномерное представление, то во-первых, оно неприводимо, во-вторых, $\rho(g) = Id_V$ для всех g, принадлежащих коммутанту G' группы G.

Задача 11.4. Постройте действие группы автоморфизмов группы G (обозначаемой $Aut(G)$) на множестве неприводимых представлений группы G (обозначенном $Irrep_{\Bbbk}(G)$). Покажите, что подгруппа внутренних автоморфизмов $Int(G)$ действует тривиально и тем самым имеется действие группы внешних автоморфизмов $Out(G) := Aut(G)/Int(G)$ на множестве $Irrep_{\Bbbk}(G)$.

Задача 11.5. Вспомните, задание группа диэдра D_n симметрий n-угольника образующими и соотношениями, её центр и коммутант и решите следующие вопросы по теории представлений:

(а) Опишите одномерные представления группы D_n.

(б) Выпишите отображение $\rho : D_n \to M_2(\mathbb{R})$ на образующих для тавтологического 2-мерного (вещественного) представления, заданного действием симметриями n-угольника с центром в $0 \in \mathbb{R}^2$. Покажите, что данное представление неприводимо над $\mathbb{R}$ (и даже над $\mathbb{C}$).

(в) Покажите, что группа $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ действует автоморфизмами на группе диэдра D_n, и постройте ещё $\varphi(n)$ двумерных (неприводимых) представлений. Какие из них изоморфны?

(г)* Рассмотрите отображения $D_n \to D_m$ для $m|n$ и опишите все неприводимые двумерные комплексные представления группы D_n с точностью до изоморфизма. Сколько их?

Лекция 12. Лемма Шура

Унитарность представлений,
Лемма Шура,
числа сплетения, (квази)регулярное представление;

Семинар 12. Лемма Шура и числа сплетения

Задача 12.1. Пусть V и W – представления группы G. Введём структуру представления группы G на пространстве $\Bbbk$-линейных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(V, W)$ посредством канонического изоморфизма $\mathrm{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$.

(а) Выразите действие G явно.

(б) Докажите, что пространство $\mathrm{Hom}(V, W)^G$ неподвижных точек совпадает с пространством морфизмов $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ представлений V и W.

(в) Воспользовавшись леммой Шура, докажите, что над произвольным полем $\Bbbk$ пространство $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ является алгеброй с делением над $\Bbbk$, если V – неприводимо.

(г)* Пусть $\mathrm{char}\, \Bbbk$ не делит порядок G, то есть выполнена теорема Машке.

Докажите, что кратность неприводимого представления V в регулярном представлении равна $\dfrac{\dim V}{\dim \mathrm{End}_G(V, V)}$ и докажите тождество $|G| = \sum \dfrac{(\dim V)^2}{\dim \mathrm{End}_G(V, V)}$.

Задача 12.2. Напомним, что группа G действует на множестве X дважды транзитивно, если она переводит любую упорядоченную пару различных элементов в любую другую упорядоченную пару.

(а) Вычислите число сплетение $c_G(\mathbb{C}X, \mathbb{C}X)$ для дважды транзитивного действия и покажите, что подпредставление $\mathbb{C}X$, образованное векторами, сумма координат которых равна нулю, неприводимо.

(б) Покажите, что перестановка базисных векторов в векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ задает квазирегулярное представление группы перестановок, а его подпредставление $\mathbb{C}^{n-1}$ с нулевой суммой координат является неприводимым как для группы перестановок, так и для знакопеременной группы A_n (для $n > 3$). Данное представление называется симплициальным.

Задача 12.3. Напомним, что группой Гейзенберга $Heis_p$ называется группа порядка p^3 заданная 3-мя образующими x, y, z и соотношениями:

$$x^p = y^p = k^p = e,\ xy = kyx,\ xk = kx,\ yk = ky$$

(а) Покажите, что центральный элемент k действует в любом неприводимом комплексном представлении константой.

(б) Покажите, что если (V_ξ, ρ) – неприводимое представление, в котором $\rho(k) = \xi Id_V$ для некоторого примитивного корня p-ой степени из единицы ξ, а $v \in V_\xi$ собственный вектор оператора $\rho(x)$, то векторы $\{\rho(y)^k v | k = 0, \ldots, p-1\}$ образуют базис в пространстве V_ξ и опишите матрицы $\rho(x), \rho(y), \rho(k)$ в этом представлении.

(в) Покажите, что для простого p все неприводимые представления $Heis_p$ одномерны или p-мерны и опишите их.

Задача 12.4. Группа $Aff_1(\mathbb{F}_q)$ состоит из аффинных преобразований прямой $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$, то есть из преобразований вида $z \mapsto az + b$, $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b \in \mathbb{F}_q$, где $z-$ координата на $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$.

(а) Вычислите порядок группы $Aff_1(\mathbb{F}_q)$, её коммутант и множество её одномерных комплексных представлений.

(б) Обозначим за $\mathbb{C}[\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}]$ – пространство комплекснозначных функций на аффинной прямой $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$. Вычислите число сплетение с собой и разложите на неприводимые данное (квазирегулярное) представление $\mathbb{C}[\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}]$.

(в) Выпишите полный список $Irrep(Aff_1(\mathbb{F}_q))$ неприводимых комплексных представлений.

Лекция 13. Представления конечных групп - 3: Характеры.

Характеры комплексных представлений и соотношение ортогональности характеров.

Задача 13.1.

(а) Пусть V – конечномерное представление группы G. Выразите характеры $V \otimes V$, V^*, $\mathrm{Hom}(V, W)$, S^2V и $\Lambda^2 V$ через характер V.

(б) $V \simeq V^*$ тогда и только тогда, когда $\chi_V(g)$ принимает только вещественные значения.

(в) Докажите, что все представления S_n самодвойственны.

(г) Докажите, что $(\chi_V, \chi_W) = (\chi_{V^* \otimes W}, \chi_{id})$ и $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \dim[V \otimes W^*]^G$. За id обозначено тривиальное одномерное представление, за $[U]^G$ обозначено пространство G-инвариантны векторов в G-представлении U;

(д) Пусть $\mathbb{C}_\xi$ – одномерное и V –неприводимое представления группы G. Покажите, что $V \otimes \mathbb{C}_\xi$ также неприводимое.

Задача 13.2.

(а) Постройте таблицу характеров групп D_4 и Q_8 и сравните их. (Верно ли, что групповые алгебры $\mathbb{C}D_4$ и $\mathbb{C}Q_8$ изоморфны?)

(б) Покажите, что разложение тензорного произведения неприводимых представлений на неприводимые одинаково для этих групп, а вот разложение симметрического и внешнего квадрата неприводимого двумерного представления разное.

Задача 13.3.

(а) Постройте таблицу характеров групп S_4 и A_4 (для S_4 можно использовать материалы лекций о квазирегулярных представлениях).

(б) Найдите разложение $\Lambda^k V$ для всех неприводимых представлений A_4 и S_4.

Задача 13.4. Пусть G действует на множестве X. Пусть χ – характер соответствующего квазирегулярного представления, χ_{id} – характер тривиального представления. Докажите, что

(а) $\chi(g)$ равен числу неподвижных точек под действием g;

(б) $(\chi, \chi_{id}) =$ (число орбит G на X).

(в) (χ, χ) равен числу G-орбит на $X \times X$.

(г) Пусть G действует на X дважды транзитиво. Покажите, что $(\chi, \chi) = 2$.

Задача 13.5.

(а) Дозаполните недостающие характеры в таблице характеров группы порядка 16.

$\#C$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7
	1	1	1	2			
	1	-1	1	$i\sqrt{2}$			
	1	1	1	0			
	1	1	1	-2			
	1	-1	1	$-i\sqrt{2}$			
	1	1	-1	0			
	1	-1	-1	0			

Свой ответ поясните! В частности, укажите размерности недостающих представлений и как раскладывается регулярное представление, характер которого вы знаете.

(б) Восстановите порядки классов сопряженности по таблице характеров посчитав скалярный квадрат строк с собой.

Справка, которая не требуется для решения данной задачи:
Перед вами таблица характеров полудиэдральной группы SD_{16}*, которая может быть задана двумя образующими* a*,* b *и соотношениями:* $\langle a^8 = b^2 = e, bab = a^3 \rangle$*. Представители классов сопряженности выглядят так:* $\big(e, \ \ a, \ \ a^2, \ \ a^4, \ \ a^5, \ \ b, \ \ ab\big)$.

Задача 13.6*. Рассмотрим действие группы S_4 на алгебре плюккеровых координат:

$$P = \mathbb{C}[x_{ij}]/(x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}), 1 \leqslant i < j \leqslant 4$$

по правилу $\sigma x_{ij} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}$ (при этом $x_{ij} = -x_{ji}$). Разложите на неприводимые подпространство, порождённое квадратичными мономами от плюккеровых координат.

Лекция 14. Индуцированные представления и двойственность Фробениуса

Изоморфизм групповой алгебры и суммы матричных,
Таблица характеров представлений группы A_5,
Различные определения индуцированного представления.

Семинар 14. Примеры индуцированных представлений

Группа $A_3 \ltimes Q_8$: Обозначим за Q_8 группу кватернионов, состоящую из элементов $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Циклическая перестановка $i \to j \to k \to i$ является внешним автоморфизмом группы Q_8 (проверьте это). Тем самым определено полупрямое произведение групп $A_3 \ltimes Q_8$.

Задача 14.1.

(а) Покажите, что $I := Ind_{\{\pm 1, \pm i\}}^{Q_8} \chi$ является неприводимым двумерным представлением, если χ – одномерное представление с $\chi(-1) = -1$. Выберете базис в I и напишите матрицы действия элементов $\{i, j, k\}$ в этом базисе.

(б) Выпишите полный список неприводимых комплексных представлений группы Q_8 и действие группы A_3 на нём.

Задача 14.2. **(а)** Задайте группу $A_3 \ltimes Q_8$ образующими и соотношениями.

(б) Вычислите коммутант этой группы и количество различных одномерных представлений.

(в) Докажите, что представление $Ind_{Q_8}^{A_3 \ltimes Q_8}\chi$ является неприводимым, если χ – нетривиальное одномерное представление группы Q_8. Выпишите действие образующих в этом представлении.

(г) Сколько неприводимых встречается в разложении $Ind_{Q_8}^{A_3 \ltimes Q_8}V$ и каковы их размерности. Опишите данные представления явно, то есть в каждом из неприводимых подпредставлений выберете базис и выпишите матрицы действие образующих группы в этом базисе.

(д) Выпишите полный список неприводимых представлений группы $A_3 \ltimes Q_8$.

Задача 14.3. Группа Гейзенерга $Heis_N$ порождается 3-мя образующими a, b, c и соотношениями $a^N = b^N = c^N = e$ и $ac = cb$, $bc = cb$, $ab = cba$.

(а) Воспользуйтесь двойственностью Фробениуса и покажите, что для произвольного делителя $d|N$ представление, индуцированное с одномерного представления подгруппы H, порожденной a^d, b, c неприводимо, коль скоро c действует в нем примитивным корнем d-ой степени из 1.

(б) Вычислите размерности всех неприводимых представлений группы Гейзенберга $Heis_N$ для произвольного N.