Лекция 14 | Заключительная (по теор) в этом году |

В следующий раз только семинар.
(семинарские задания к сегодня допсли).

В прошлый раз до-ли, что представление /$\mathbb{C}$.
однозначно определяется своим х-ром.

Теор. Соотношения ортогональности х-ров:

$V_1, \dots, V_d$ — список неприводимых пр-ий гр-ы G,
$C_1, \dots, C_d$ — список классов сопряж., то
матрица $\chi_{V_i}(C_j)$ - ортогональна (таблица х-ов).
отн. эрмитово спаривания $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)}$. $\square$

Теор. Имеет место из-зм $\varphi: \mathbb{C}G \xrightarrow{\sim} \bigoplus\limits_{V_i \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i) \simeq \bigoplus \mathrm{Mat}_{\dim V_i}$

Пример. $\mathbb{C}S_3 \simeq \mathrm{Mat}_1 \oplus \mathrm{Mat}_1 \oplus \mathrm{Mat}_2$

$\underset{\text{трив}}{\mathbb{1}}, \underset{\text{знак}}{\mathrm{Sgn}}, \underset{\text{сим. }\Delta.}{\mathbb{C}^2}$

Д-во: Вычислим $\dim \mathbb{C}G = \#G = \dim(\bigoplus \mathrm{End}(V_i)) = \sum \dim V_i^2$

(сл-ие разлож. рег. пр-ия).

$\forall$ (неприв) пр-ие (V, ρ) $\quad \rho: G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$

$\rho: \mathbb{C}G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V).$

Тем самым φ — отображение действия. (гом-зм алг-р по опр пр-ия).

Покажем сюрьективность φ:

Заведём на двойственном пр-ве $\mathbb{C}G^* = \mathrm{Fun}(G \to \mathbb{C})$.

скалярное пр-ие: $\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum \varphi(g) \overline{\psi(g)}$. Невырожд. эрмитово скал. произв.

В прошлый раз (из леммы Шура) вывели утв:

Зафиксируем базис в каждом неприв. пр-ии $V_i = \langle e_1, \dots, e_{d_i} \rangle$.

Пусть $\rho_V(g)_{ij}$ — матричный коэф в пр-ии V.

Если усреднить отобр: $V \to W$, $e^v_{i_0} \to e^w_{j_0}$

получим т-во: $$\frac{1}{|G|} \sum_g \rho_W(g)_{ii_0} \rho_V(g^{-1})_{j_0 j} = \begin{cases} 0, & V \not\simeq W \\ \dfrac{\delta_{i_0 j_0} \delta_{ji}}{\dim V}, & V \simeq W \end{cases}$$

$$= \langle \rho_W(g)_{ii_0}, \rho_V(g)_{j_0 j} \rangle$$

$\boxed{\rho_V(\,)_{ij} : G \to \mathbb{C}.}$ $\rho_V(\cdot)_{ij} \in \mathbb{C}G^*$.

$\Rightarrow$ Набор ф-ий $\boxed{\rho_V(g)_{ij}}$ — линейно независим,

т.к. их матрица Грамма невырождена.

$g \longrightarrow$ М-ца $(\rho_V(g))$ в заданном базисе $\longrightarrow$ Выбираю ij-клетку — это число.

$\mathbb{C}G$ = базис $g_1, \dots, g_n$ – эл-ты группы.

$\mathbb{C}G^*$ – двойств. базис – $\delta_g(h) = \begin{cases} 0, & h \neq g \\ 1, & h = g. \end{cases}$

Матричные единицы соотв. двойственному отображению

$\mathbb{C}G^* \xleftarrow{\rho^*} \bigoplus \mathrm{Mat}_{\dim V_i}^*$ Д-ем, что ρ^* – инъективно

$\Updownarrow$

$\mathbb{C}G \xrightarrow{\rho} \bigoplus \mathrm{Mat}_{\dim V_i}$ ρ – сюръективно.

Ин-за из р-ва размерностей.

$\boxed{\text{Вывод}}$ $\mathbb{C}G \simeq \bigoplus \mathrm{Mat}_{n_i}(\ )$ как алгебра

её неприводим. пр-ия – тавтол. пр-ие $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n$.

Сл-ие У неизоморфных групп D_4, Q_8.

список неприв. пр-ий одинаковый 4 – 1-одном, 1 – 2-мерн.

$$\Rightarrow \mathbb{C}D_4 \simeq \mathbb{C}Q_8 \simeq \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus M_2(\mathbb{C}).$$

Зам. Любая конечномерная полупростая алг-ра$/\mathbb{C}$ $\simeq \bigoplus \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Но это не верно над $\mathbb{R}$.

в частности $\mathbb{R}D_4 \not\simeq \mathbb{R}Q_8$.

$$\underset{\ldots\oplus M_2(\mathbb{R})}{\mathbb{R}D_4} \qquad \underset{\ldots\mathbb{H}\oplus\ldots}{\mathbb{R}Q_8}$$

По категории пр-ий группы$/\mathbb{C}$ не возможно восстановить саму группу.

Пример вычислений таблицы х-ов на примере группы $A_5 \triangleleft S_5$

класс сопр.	#к.	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^5$	$\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^5 - \mathbb{C}$	$\Lambda^2 \mathbb{C}^4$	$S^2 \mathbb{C}^4$	$\mathbb{C}^5_6$	$\mathbb{C}^3_+$	$\mathbb{C}^3_-$
e	1	1	5	4	6	10	5	3	3
(123)	20	1	2	1	$\frac{1^2-1}{2} = 0$	1	-1	$a=0$	$-a=0$
(12)(34)	15	1	1	0	$\frac{0^2-4}{2} = -2$	2	1	-1	-1
(12345)	12	1	0	-1	$\frac{(-1)^2+1}{2} = 1$	0	0	$\frac{1+\sqrt5}{2}$	$\frac{1-\sqrt5}{2}$
(12354)	12	1	0	-1	1	0	0	$\frac{1-\sqrt5}{2}$	$\frac{1+\sqrt5}{2}$

неприв.

$\chi_{\mathbb{C}^5}(\sigma) = \#$ неподв. эл-ов.

Трив. пр-ие.

неприв.

Ортогональность по строке:

$$\sum_{V \in \mathrm{Irrep}} \chi_V(s)\overline{\chi_V(t)} = \frac{|G|}{|C|}\delta_{C_s, C_t}$$

$s, t \in G$

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + a^2 + a^2 = \frac{60}{20} = 3 \Rightarrow a = 0$$

$$\sum_V \chi_V((123))\overline{\chi_V((123))}$$

Получили таблицу х-в для A_5 из перестановочного пр-ия $\mathbb{C}^5$.

$V = V_1^{m_1} \oplus \dots + V_k^{m_k}$ TO $c(V,V) = \sum m_i^2$.

$\Rightarrow c(V,V) = 1 \Rightarrow V = V_1$.

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)}{2}$$

$$\chi_{S^2 V}(g) = \frac{\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)}{2}.$$

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\rho(g^2) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad Ae_i = \lambda_i e_i$$

$$\Rightarrow \Lambda^2 A = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \lambda_i \lambda_j \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^2 A\,(e_i \wedge e_j) = Ae_i \wedge Ae_j = \lambda_i \lambda_j\, e_i \wedge e_j$$

$\Lambda^2 V = \langle e_i \wedge e_j \rangle$

$$\mathrm{tr}\, \Lambda^2 A = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2}_{(\mathrm{tr}\,\rho(g))^2} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}_{\mathrm{tr}\,\rho(g^2)}}{2}$$

Ф-ла для суммы квадратов

$V = V^2$

$V_1 \simeq V_2 \qquad \Lambda^2 \mathbb{C}^4 = V^2 \qquad \mathbb{C}(V^2, V^2) = 2^2 = 4.$

$2 = 1 + 1.$

$\#G = 60 = \underset{\mathbb{C}}{1^2} + \underset{\mathbb{C}^4}{4^2} + \underset{\mathbb{C}^5_\epsilon}{5^2} + a^2 + (6-a)^2 \Rightarrow a^2 + (6-a)^2 = 60 - 1 - 16 - 25 = 18.$

$a \in \mathbb{N}. \qquad a = 3.$

$\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = 3.$

Как ещё можно строить пр-ия группы?

Индуцированные пр-ия:

На примере $\mathrm{Heis}_p = \left\langle a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{l} a^p = b^p = c^p = e \\ ac = ca \\ bc = cb \\ ab = cba \end{array} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subset GL_3(\mathbb{F}_p)$

$\# \mathrm{Heis}_p = p^3$. Любой эл-т может быть одн. записан в виде $a^i b^j c^k$ $0 \le i, j, k < p$.

$\#$ классов сопр $p^2 + p - 1$

Возьмём подгр H, порожд. b, c $\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Неприв-ые пр-ия H – одномерны $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$, $b = \alpha \, Id$, $c = \beta \, Id$.

Хотим построить минимальное пр-ие группы Heis_p которое содерж $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, как пр-ие подгр H.

$H = \langle b, c \rangle \subset Heis_p = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = e$

$ba = c^{-1}ab.$
$ac = ca$
$bc = cb$

$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} = \langle v \rangle. \qquad bv = \alpha v, \quad cv = \beta v.$

V
$=$

$Heis_p \curvearrowright V \qquad$ в V есть эл-нт $v, av, a^2v, \dots, a^{p-1}v, a^pv.$

$$b a^s v = abc^{-1}a^{s-1}v = a^s(bc^{-s})v = a^s \alpha\beta^{-s} v = \underbrace{\alpha\beta^{-s}} a^s v.$$

Если $\beta \neq 1$, то числа $\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta^2, \dots, \alpha\beta^{p-1}$ – различны.

$\Rightarrow$ Вектора $v, av, a^2v, \dots, a^{p-1}v$ – линейно независимы.

$$\Rightarrow V = \underbrace{\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \oplus a\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \oplus \dots \oplus a^{p-1}\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}_{p \text{ копий } \mathbb{C}_{\alpha,\beta}.}$$

$ca^sv = a^scv = \beta a^s v.$
$\Downarrow.$

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha\beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha\beta^{p-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(c) = \begin{pmatrix} \beta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta \end{pmatrix}$$

Замечание Кол-во копий исходного пр-ия = индексу подгруппы $H \subset Heis_p$, копии $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ занумерованы классами смежности $Heis_p/H \simeq \langle a \rangle$.

Конструкция индуцированного пр-ия: $H \subset G$, $V \in Reps(H)$

Строим $W := \mathrm{Ind}_H^G V \in Reps(G)$.

Выберем представителей классов смежности G/H, т.е. $G = x_1 H \sqcup x_2 H \sqcup \ldots \sqcup x_d H$

$d = |G|/|H|$.

Возьмём d копий пр-ия H:

$$x_1 V \oplus x_2 V \oplus \ldots \oplus x_d V$$

Зададим действие: $g x_i H = x_j H \Rightarrow \exists h_i = h_i(g, x_i) : \; g x_i = x_j h_i$.

$$\rho(g)\Big|_{x_i V} := \rho(h_i)\Big|_{x_j V} \qquad \text{"}x_i\text{"}V \xrightarrow{\rho(h_i)} \text{"}x_j\text{"}V$$

Проверка действия

$\rho(g_1)\circ\rho(g_2) =$
$= \rho(g_1 g_2)$.

$$(g_1 g_2) x_i \underset{\shortparallel}{=} x_k (h_j h_i)$$

Проверка того, что это пр-ие: $g_1(g_2 x_i) = g_1(x_j h_i) = x_k h_j h_i$ - р-во в группе.

Априоре конструкция зависит от выбора представителей классов смежности $x_1, \dots, x_d$.

Однако пр-ие изоморфны для разных выборов.

Универсальное определение:

$$\mathrm{Ind}_H^G V := \Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} V \ \text{"="}$$

Универсальный объект т.ч.

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{\Bbbk G}_{} \overset{\curvearrowleft \Bbbk H}{\times} V \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\text{билинейное отобр.}"'] & \Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} V \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\
W &
\end{tikzcd}$$

$- \otimes_A -$ -линейность по A,

т.е. $f(xa, y) = f(x, ay)$. $\forall a \in A$.

$f(\lambda x, y) = f(x, \lambda y) =$

$f(x\lambda, y) = \cancel{\lambda f(x,y)}$.

Это значит, что $g \otimes v \Big/ \underline{(gh \otimes v - g \otimes hv)}$

$gh \otimes v = g \otimes \rho(h) v$.

$g = x_i h$, то $g \otimes v = x_i \otimes hv$.

Вот и копии пр-ия V в кол-ве G/H.

Т-ма (Двойственность Фробениуса)

Имеет место из-зм $\quad \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G V, W) \cong \mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{Res}_H^G W)$

$$\mathrm{Reps}(G) \underset{\mathrm{Ind}_H^G}{\overset{\mathrm{Res}\text{ - ограничение на подгруппу}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Reps}(H)$$

т.е. ф-ры Res, Ind - сопряжены.

Д-во: Пусть $\varphi: \mathrm{Ind}_H^G V \to W$, тогда выберем в качестве 1 из представителей
$(\cdots>)$

$\mathrm{Ind}_H^G V \supset eV \oplus x_2 V \oplus \ldots \qquad G/H = e, x_2, \ldots$

$G/H = eH \sqcup x_2 H \sqcup \ldots$

$\varphi\big|_{eV} : V \to W$ (согласов. с действ H). т.к. eV - H-инвар-но

$(<\cdots)$ Если $\psi: V \to W$ (согл. с H).

постр. $\overline{\psi}: \mathrm{Ind}\, V \to W$.

$\overline{\psi}\big|_{x_i V} = \rho_W(x_i) \circ \psi$

Утв-ся, что $\varphi \to \varphi\big|_{eV}$, $\overline{\psi} \leftarrow \psi$ взаимнообратны (прямая проверка)

<u>Пример</u> Вычисление при помощи дв-ти Фробениуса:

$\mathrm{Heis} \supset H$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Heis}}\left(\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Heis}}\mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Heis}}\mathbb{C}_{\alpha\beta}\right) \overset{\text{Дв. Ф}_р}{=\!=} \mathrm{Hom}_H\left(\mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathrm{Res}\left(\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Heis}}\mathbb{C}_{\alpha,\beta}\right)\right) =$$

$$= \mathrm{Hom}_H\left(\underline{\underline{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}}, \underline{\underline{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}} \oplus \mathbb{C}_{\alpha\beta,\beta} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}_{\alpha\beta^{p-1},\beta}\right) = \mathrm{Hom}_H\left(\mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathbb{C}_{\alpha\beta}\right) = \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow$ Пр-ие $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Heis}}\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ — неприводимо.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Heis}}\left(\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Heis}}\mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Heis}}\mathbb{C}_{\alpha',\beta'}\right) = \mathrm{Hom}_H\left(\overset{c\to\beta}{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}, \overset{c\to\beta'}{\mathbb{C}_{\alpha',\beta'}} \oplus \mathbb{C}_{\alpha'\beta',\beta'} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}_{\alpha'\beta'^{p-1},\beta'}\right) \underset{\beta\neq\beta'}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Если $\beta \neq \beta'$ то пр-ия $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Heis}}\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \not\cong \mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Heis}}\mathbb{C}_{\alpha',\beta'}$.

$\Rightarrow$ Получим $p-1$ p-мерное неприв. пр-ие. $\square$

$$\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{Ind}\,\mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathrm{Ind}\,\mathbb{C}_{\alpha',\beta'}\right) = \mathrm{Hom}_H\left(\mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathbb{C}_{\alpha',\beta'} \oplus \mathbb{C}_{\alpha'\beta',\beta'} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}_{\alpha'\beta'^{p-1},\beta'}\right)$$

$$\mathrm{Hom}_H\left(\mathbb{C}_{\alpha,\beta}; \mathbb{C}_{\gamma,\delta}\right) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \alpha=\gamma, \ \beta=\delta \\ 0 \end{cases}$$

Если $\beta \neq \beta'$ то совпадений нет.

Все различные корни p-ой степ. из 1.

Если $\beta = \beta'$ слева $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ $\quad \alpha, \ \underbrace{\alpha'\beta, \ \alpha'\beta^2, \ \dots \ \alpha'\beta^{p-1}}$

$\beta = \sqrt[p]{1}$, α, α' – корни p-ой 1.