Лекция 3. $\Bbbk[x]$-модули = Пространства с оператором

Задача 3.1. Докажите, что некоторая степень минимального многочлена матрицы делится на его характеристический.

Задача 3.2. Пусть у обратимой матрицы A минимальный многочлен $p(\lambda)$ совпадает с характеристическим. Чему может быть равен минимальный многочлен матрицы A^{-1}?

Задача 3.3.

(а) Покажите, что если минимальный многочлен комплексной матрицы не имеет кратных корней, то матрица A – диагонализуема.

(б) Пусть $\varphi : G \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ – гомоморфизм конечной группы G в группу обратимых преобразований пространства $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $\forall g \in G$ матрица $\varphi(g)$– диагонализуема.

(в) Опишите фробениусову нормальную форму операторов, в квадрате равных себе.

Задача 3.4. Найти условие, при котором диагонализуема вещественная матрица с числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на побочной диагонали и нулями на всех остальных местах

(а) над полем вещественных чисел, **(б)** над полем комплексных чисел.

Задача 3.5.

(а) Вспомните неприводимые многочлены степеней 2 и 3 над $\mathbb{F}_2$ и опишите все неразложимые $\mathbb{F}_2[x]$-модули размерности $\leqslant 3$.

(б) Опишите классы сопряженности (=фробениусовы нормальные формы) операторов из $\mathsf{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.

(в) Опишите цикловые типы образов классов сопряженности при вложении $\mathsf{GL}_3(\mathbb{F}_2) \to S_7$, построенному по действию группы $\mathsf{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ на множестве из 7 ненулевых векторов в $\mathbb{F}_2^3$.

(г)* Вычислите порядки всех классов сопряженности и докажите, что группа $\mathsf{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ – проста. *Указание:* Иногда проще описать централизатор класса сопряженности в $\mathsf{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, сравнив его с соответствующим централизатором в S_7.