Семинар 4. Жорданова Нормальная Форма

Задача 4.1.

(а) Зная жорданову нормальную форму линейного оператора, найдите его минимальный многочлен.

(б) Найдите характеристический и минимальный многочлены матриц $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Подобны ли эти матрицы?

(в) Докажите, что 3×3 матрицы подобны тогда и только тогда, когда их характеристический и минимальный многочлены совпадают. Верно ли это для матриц $n \times n$ при $n > 3$?

Задача 4.2. Найдите

(а) ЖНФ и жорданов базис матрицы над полем $\mathbb{C}$ у матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(б) какие простые и с какой кратностью входят в $\mathbb{C}[x]$-модуль $V = \mathbb{C}^5$, в котором x действует матрицей A;

(в) A^{100} и $\exp(A)$.

Задача 4.3. Назовем вещественный (соотв. комплексный) линейный оператор *полупростым*, если его минимальный многочлен не имеет кратных комплексных корней. Докажите, что

(а) вещественный полупростой оператор A диагонализуем над $\mathbb{C}$ и раскладывается в прямую сумму двумерных и одномерных вещественных A-инвариантных подпространств.

Сравните данное определение полупростоты с тем, что было на лекции.

(б) ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство – полупростой оператор.

(в) семейство коммутирующих комплексных полупростых операторов можно одновременно диагонализовать в некотором базисе.

(г) сумма двух коммутирующих вещественных полупростых операторов – полупростой оператор.

(д)* Докажите, что полупростые операторы плотны в пространстве всех операторов (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Выведите из этого теорему Гамильтона-Кэли.

Задача 4.4. Пусть $A = A_s + A_n$ – разложение Жордана оператора A (над $\mathbb{C}$) в сумму полупростого и нильпотентного оператора.

(а) Докажите, что существуют многочлены $p(x), q(x)$ без свободного члена такие, что $A_s = p(A), A_n = q(A)$.

Отсюда следует, что A_s, A_n коммутируют с любым линейным оператором, коммутирующим с A.

(б) Докажите, что любой оператор, коммутирующий с любым оператором, коммутирующим с A имеет вид $f(A)$ для некоторого многочлена $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.