Семинар 2. $\mathbb{Z}$-модули = абелевы группы

Задача 2.1. Группа A задана 4-мя образующими $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и 4-мя соотношениями

$$52a_1 + 32a_2 + 120a_3 + 50a_4 = 2a_1 - 8a_2 + 10a_3 = -10a_2 + 10a_3 = 50a_1 + 50a_2 + 100a_3 + 50a_4 = 0$$

(а) Разложите G в прямую сумму циклических,
(б) Разложите G в прямую сумму примарных циклических.
(в) Чему равен максимальный возможный порядок её элементов?
(г) Вычислите порядок элемента $a = 53a_1 + 32a_2 + 121a_3 + 50a_4$ в группе A.

Задача 2.2. Найдите минимально возможное число образующих абелевой группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

Задача 2.3. *(Обратная к теореме Лагранжа для абелевых групп)* Пусть A – конечная абелева группа и n делит $|A|$. Докажите, что в A есть подгруппа порядка n.

Задача 2.4. Пусть E – подгруппа $\mathbb{Z}^n$, порожденная набором целочисленных векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$. Покажите, что

(а) определитель матрицы Грамма $\det(\langle e_i, e_j \rangle)$ равен квадрату порядка факторгруппы $\mathbb{Z}^n/E$ в случае, если оба этих числа конечны и отличны от нуля.

(б) количество промежуточных абелевых подгрупп $E \subset F \subset \mathbb{Z}^n$ конечно тогда и только тогда, когда векторы $e_1, \ldots, e_n$ – образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

(в) множество векторов $f \in \mathbb{R}^n$, таких что $\langle f, e_i \rangle \in \mathbb{Z}$ для всех i, образует свободную конечно порожденную абелеву группу ранга n, при условии, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ – образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

Указание: Вспомните понятие двойственного базиса.

Задача 2.5.

(а) Модуль называется простым, если у него нет нетривиальных подмодулей. Опишите конечно порождённые простые $\mathbb{Z}$-модули.

(б) Модуль L называется полупростым, если для любого подмодуля $M \subset L$ существует дополнительный подмодуль N, т.е. такой, что $L = M \oplus N$. Опишите конечно порождённые полупростые $\mathbb{Z}$-модули.

(в) Модуль называется неразложимым, если его нельзя представить в виде суммы двух подмодулей. Опишите конечно порождённые неразложимые $\mathbb{Z}$-модули.