Лекция 10 | Последние лекции про тензоры

В прошлый раз определили понятие алгебры $/\mathbb{K}$.

Опр. A - алг-ра $/\mathbb{K}$, если A – вект. пр-во $/\mathbb{K}$, A - кольцо. $\Bigg\}$ $+$ - одно и тоже, $*: A \times A \to A$ билинейно,

$\Rightarrow \quad *: A \otimes A \to A$.

Тем самым Алгебра задаётся тензором $\mu \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, A)$.

Свободная алгебра, порождённая вект пр-вом V.
(Обозн. TV) "T" – Tensor algebra (= тензорная алгебра).

Универсальное св-во свободной алгебры (св-во объекта).
состоит в следующем.

$$\begin{tikzcd} TV \arrow[r, dotted, "\exists \tilde{\varphi}"] & A \\ V \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\forall \varphi"'] & W \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi}$ – морфизм алгебр.

W – подпр-во

$\forall \varphi$ - $\cancel{\mathbb{K}}$-линейное отобр

Конструкция $TV := \bigoplus_{r=0}^{\infty} V^{\otimes r}$ (как векторное пр-во) конечные линейные комбинации тензоров произвольной степени.

Умножение: $V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s} \xrightarrow{\sim} V^{\otimes r+s}$

$\underbrace{(V \otimes \ldots \otimes V)}_{r} \otimes \underbrace{(V \otimes \ldots \otimes V)}_{s}$ (ассоциативность очевидна).

Для умножение можно использовать тот же символ "$\otimes$".

<u>Универсальное св-во</u> $\boxed{\mathrm{Hom}_{AsAlg}(TV, A) \simeq \mathrm{Hom}_{Vect_{\Bbbk}}(V, Vect_{\Bbbk}(A)).}$

В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V

то "мономы" $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \mid 1 \leq i_j \leq n\}$ — образуют базис в $V^{\otimes r}$

Если дано $\Bbbk$-лин. отобр $V \longrightarrow A$

$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle \longrightarrow \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$

$\boxed{e_1, \ldots, e_n \text{ — образующие тензорной алгебры } TV}$

$TV \ni e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \longrightarrow a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}.$

Универсальное св-во $\quad \mathrm{Hom}_{AsAlg_{\Bbbk}}(TV, A) \overset{\tilde\varphi \xleftrightarrow{1:1} \varphi}{\simeq} \mathrm{Hom}_{Vect_{\Bbbk}}(V, Vect_{\Bbbk}(A))$

для функторов $\quad T : Vect_{\Bbbk} \rightleftarrows Alg_{\Bbbk} : Vect_{\Bbbk}$

наз сопряжением „adjunction" между категориями $Vect_{\Bbbk}$, $Alg_{\Bbbk}$.

Ф-ры T, $Vect_{\Bbbk}$ называются сопряжёнными

T – сопряж слева к $Vect_{\Bbbk}$

$Vect_{\Bbbk}$ – сопряж справа к T.

$$T : V \longrightarrow T^{\otimes}V = T(V)$$

$Vect : A \longrightarrow A$ (забывает стр-ру алгебры) помнит стр-ру вект. пр-ва.

Замеч. Для дальнейшего не нужно, но часть полезного современного языка. (из теор. категорий).

Сл-ие Задание алгебры образующими и соотношениями

$\Longleftrightarrow$ задать факторалгебру свободной: (ассоц, но не коммут) $x_1x_2 \neq x_2x_1$

Обозн.

$$A = \mathbb{K}\langle x_1,\dots,x_n \mid f_1(x_1\dots x_n),\dots f_m(x_1\dots x_n)\rangle =$$

$V = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$

$$= TV / I \quad , I \text{ - порождён } f_i \in TV.$$

$$f_1(x_1\dots x_n) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^3 \Longleftrightarrow x_1\otimes x_1 + x_1\otimes x_2 + x_3\otimes x_3\otimes x_3.$$

Пример. Свободная коммут. алгебра = Фактор своб ассоц / соотн. коммут.

$$SV = \mathbb{K}[x_1,\dots x_n] \cong \mathbb{K}\langle x_1,\dots,x_n \mid x_ix_j - x_jx_i\rangle \quad \forall i,j.$$

кольцо мн-нов

симметрическая алгебра.

$$\| \quad TV/(I) = \bigoplus_n S^n V.$$

Обе ал-ры удовлетворяют универсальному св-ву:

$$\mathrm{Hom}_{ComAlg_{\mathbb{K}}}(S(V), A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Vect_{\mathbb{K}}}(V, Vect(A)).$$

$$S(V) = TV \Big/ \underbrace{(v\otimes w - w\otimes v)}_{= I} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{K}[x_1, \ldots x_n].$$

$\boxed{\text{Упр} \ \text{вычислить} \ \dim S^r V \ \text{через} \dim V.}$

Базис в $S^r V$ состоит из тензоров

вида $\underbrace{x_1\otimes\ldots\otimes x_1}_{r_1} \otimes \underbrace{x_2 \ldots x_2}_{r_2} \otimes \ldots \quad x_n =: x_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n}$

индексы базисных векторов не убывают

<u>Почему базис?</u> – эти тензоры всё порождают.

т.к. если пара индексов убывает, то их переставить

по модулю идеала I.

– Набор $x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$ – линейно независим, т.к.

образы при отображении $\tilde{\varphi}$ в кольцо мн-ов

линейно независимы (являются мономами).

$T(V) = \bigoplus T^r V \qquad I = \bigoplus I^r, \ I^r = I \cap T^r V = \langle v_1 \ldots \underbrace{(v_i\otimes v_{i+1} - v_{i+1}\otimes v_i) \ldots}_{r} \rangle$

$S^r V = T^r V / I^r$ т.к. I порождается однородными эл-тами.

Алгебра Грассмана = Универсальная супер-коммутативная
(косо)-коммут.

Опр1 $TV \Big/ \underset{(v\otimes v)}{\overset{\circ J}{}}$ $\Rightarrow$ $v\otimes w + w\otimes v = (v+w)\otimes(v+w) - v\otimes v - w\otimes w$

$\cap J$

Теор. $\Lambda^{\cdot}(\ )$-ассоц. алгебра. (простая проверка)

Опр2 Алгебра $\Lambda^{\cdot}(\xi_1,\dots,\xi_n)$ с базисом $\xi_I := \xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_k}$
$I=(i_1,\dots,i_k) \subset \{1,\dots,n\}$.

косо коммут. $\xi_i\wedge\xi_j = -\xi_j\wedge\xi_i$

$\xi_{i_{\sigma(1)}}\wedge\dots\wedge\xi_{i_{\sigma(k)}} = \xi_{\sigma(I)} = (-1)^{\sigma}\xi_I = (-1)^{\sigma}\xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_k}$.

"$\wedge$"-символизирует умножение. т.е. $= \xi_I\wedge\xi_J = \xi_{I\cup J}$.
$\xi_I * \xi_J$

Обозначение из дифф. геометрии, где $\xi_i = dx_i$ – наука про формы де Рама на мн-ии.

Более аккуратно $\xi_I\wedge\xi_J = \xi_{I\cup J}(-1)^{c(I,J)}$ $c(I,J) = \#\{(i,j)\in I\times J \mid i>j\}$.
если индексы по возрастанию в I,J и в $I\cup J$

Проверка ассоц-ти: $(\xi_I\wedge\xi_J)\wedge\xi_K=\xi_I\wedge(\xi_J\wedge\xi_K)$

$$\xi_{I\cup J\cup K}\cdot(-1)^{c(I,J)+c(I\cup J,K)=c(I,J)+c(I,K)+c(J,K)}$$

$$(-1)^{c(J,K)+c(I,J\cup K)=c(J,K)+\dots}$$

В частности $\Lambda^{\cdot}(V)=\bigoplus_{r=0}^{n}\Lambda^{r}V$, Λ^r - компонента, сост. из ξ_I $|I|=r$.

$V=\langle\xi_1,\dots,\xi_n\rangle$

$\dim\Lambda^r V=\#(\text{подмн-в из } r \text{ эл-ов})=\binom{n}{r}$.

$\dim\Lambda^{\cdot}V=2^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$.

Универсальная кососимм. алг. $TV/(V\otimes V)\xrightarrow{\sim}\Lambda^{\cdot}(V)$.

т.к. фактор порождается тензорами вида $\xi_{i_1}\otimes\dots\otimes\xi_{i_r}$, $i_1<\dots<i_r$,

которые лин. нез-мы в образе.

(Косо) симметричные тензоры. $\boxed{\dim V < \infty}$

$V^{\otimes 2}$ - все тензоры порядка 2. $\overset{\sim}{\longrightarrow}$ полилинейные ф-ии на $\underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{2}$

$\cup$ $\qquad\qquad$ $\cup$

$ST^2(V) \longleftrightarrow$ (симметричные ф-ии: $\forall \sigma \in S_n \quad f(x_1, \ldots, x_2) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(2)})$)

(полилин. ф-ии из $W_1 \times \ldots \times W_n \longrightarrow \mathbb{K}$) $\simeq$ $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W_1 \otimes \ldots \otimes W_n, \mathbb{K}))$

$\mathrm{Hom}(W, \mathbb{K}) = W^*$

$(W^*)^* \simeq W$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(\underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{2}, \mathbb{K}) = (V^{*\otimes 2})^* = (V^{**})^{\otimes 2} = V^{\otimes 2}$

$ST^r(V) \subset V^{\otimes r}$, <u>Пример.</u> $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \in ST^2(V)$

симметричные тензоры $\qquad v_1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_1 \in ST^r(V).$

плохо в полож. х-ке.

Т.е. $ST^r(V) = [V \otimes \dots \otimes V]^{S_r}$

$ST^m V \quad ST^n V \subset V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \quad S_m \curvearrowright \quad S_n \curvearrowright$

<u>Предл.</u> Следующая операция $f * g := \sum_{\sigma \in S_{m+n}/S_m \times S_n} \sigma(f \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{m+n}} \frac{1}{m!\,n!} \sigma(f \otimes g)$

задаёт структуру ассоциативной, коммутативной алгебры на $\bigoplus_{r=0}^{\infty} ST^r(V)$.

<u>Пример.</u> $v * w := v \otimes w + w \otimes v.$

$\underbrace{v * v * \dots * v}_{r} = v \otimes \dots \otimes v\,(r!)$ — кол-во эл-тей в $S_r / S_1 \times \dots \times S_1 = S_r$.

$ST^1(V) = V \Rightarrow$

$$\bigoplus_r ST^r(V) \hookrightarrow \bigoplus_r V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \bigoplus_r S^r(V) = T^{r}V / I_r$$

ком. алг $\qquad$ тождеств на V $\qquad$ ком. алг.

Предложение

$$\begin{tikzcd} & TV \arrow[dr] & \\ ST(V) \arrow[ur] & & S(V) \arrow[ll, dashed, "\pi_S"] \end{tikzcd}$$

не явл. гом-зм алгбр?

г-зм алгебр. π_S - опр-ся из универсального св-ва

т.к $S(V)$, $ST(V)$ – комм. алгебры.

- Если $\operatorname{char} k = 0$, то π_S – из-зм.
- Если $\operatorname{char} k = p$, то $\pi_S(\underbrace{v \cdot \ldots \cdot v}_{p}) = p!\, v \otimes \ldots \otimes v = 0.$

Д-во $\dim ST^2(V) = \dim S^2 V$, базис в $ST(V) = Sym(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k})^2$ $= \Sigma$ орбите S_k

Замечание если $\operatorname{char} k = p$, то $v \otimes \ldots \otimes v$ не получается как произведение эл-ов из V.

Т.е. ком. алгебра $ST^2(V)$ не порождается V. (в реальности бесконечно порождена).

Алгебра $ST^2(V)$ наз-ся алг-рой с раздел. степенями, т.к. она порождается V относительно операций умножения и "разд. степени" $v^{(p)}$ "=" $\dfrac{v * \ldots * v}{p!}$

Аналогично можно построить подпр-во кососимметричных тензоров $\Lambda T^2(V) \subset T^2 V$ (например $v\otimes w - w\otimes v \in \Lambda T^2(V)$).

Зам. Если $\dim V = n$, $\forall k>0$ то $\Lambda^{n+k} V = \Lambda T^{n+k} V = 0$

и построить стр-ру кососимметричной алгебры на $\bigoplus\limits_{r=0}^{n} \Lambda T^r(V)$

$$f * g := \sum_{\sigma \in S_{m+n}/S_m\times S_n} \sigma(f\otimes g)(-1)^\sigma$$

Чтобы знак синхронно выбирают канонич. пр-лей – шафф перестановки: $\sigma(1)<\sigma(2)\ldots<\sigma(m)$; $\sigma(m+1)<\ldots<\sigma(m+n)$.

И опять из универсального св-ва $\Lambda(V)$ имеем отобр $\bigoplus\limits_{r=0}^{n} \Lambda^r(V) \xrightarrow{\pi_\Lambda} \bigoplus\limits_{r=0}^{n} \Lambda T^r(V)$.

Утв. π_Λ – из-зм вне зависимости от х-ки поля

т.к. $v\otimes v=0$ в $\Lambda(V)$ и в $\Lambda T^2(V)$ и dim

$$\pi_\Lambda(\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_k}) = \sum_{\sigma\in S_k}(-1)^\sigma\, \xi_{i_{\sigma(1)}}\otimes\ldots\otimes\xi_{i_{\sigma(k)}} \quad \square.$$

Замеч. упраж. $\dim \Lambda^n V = \dim \Lambda T^n V = 1$, если $\dim V = n$.

соответствует факту, что $\exists !$ с точн. до пропорциональности кососимм. полилинейная ф-ия от n-аргументов.

кот наз-ся det:

т.е. $\underset{f_1}{\underset{\shortparallel}{Ae_1}} \wedge \ldots \wedge \underset{f_n}{\underset{\shortparallel}{Ae_n}} = (\det A)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ (прямое вычисл. с алгеброй Грассмана). $\square$

Зад 9.5 | $\underset{\shortparallel}{\mathrm{Hom}(V,V)} \to \ldots\ldots \to (\mathrm{Hom}(V,V))^*$.

$$\varphi: W \xrightarrow{\sim} W^* \iff \tilde{\varphi}: W \times W \to \mathbb{K}.$$

$$(v \mapsto \tilde{\varphi}(v,-)) \longleftarrow \tilde{\varphi}$$

Зад 9.4) $F\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i \otimes v_i\Big) \longrightarrow$ оператор ранга $\le k$.

$V^* \otimes W \ni A$

$$f \in ST^m(V) \subset V^{\otimes m}$$

$$g \in ST^n(V) \subset V^{\otimes n}$$

$$f * g := \sum_{\sigma \in S_{m+n}/S_m \times S_n} \sigma(f \otimes g) \in V^{\otimes m+n}$$

$$\in ST^{m+n}(V)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ ST^1}}{v_1} * (\underset{\substack{\uparrow \\ ST^2}}{v_2 \otimes v_3 + v_3 \otimes v_2}) = \sum_{\sigma \in S_3/S_1 \times S_2} v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3 + v_3 \otimes v_2) + (v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 + v_3 \otimes v_1 \otimes v_2) +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ (v_2 \otimes v_3 + v_3 \otimes v_2) \otimes v_1 .$$

$$\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow A$$

$$\rotatebox{90}{$\in$}$$

$$(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow a_1,\dots,a_n$$

$$f(x) \longrightarrow f(a).$$

$$x_1x_2+x_1x_3^2 \longrightarrow a_1a_2+a_1a_3^2$$

$$SV \xrightarrow{\pi_S} ST(V) \subset T(V).$$

$V=\langle v_1,\dots,v_n\rangle$ $\qquad v_i \longrightarrow v_i \subset ST^1(V) = V = T^1(V).$

$$v_1\cdot v_2 \longrightarrow v_1 * v_2 = v_1\otimes v_2 + v_2\otimes v_1$$

$$v_1\cdot v_2\cdot v_3 \longrightarrow v_1*(v_2*v_3) = v_1*(v_2\otimes v_3+v_3\otimes v_2) = \sum$$ 6 слагаемых.