Лекция 11 | Представления (конечных) групп.

Еще 4 лекции – по теор представлений
последняя 12 мая
24 экзамен – письменный удалённый

Было понятие модуля над кольцом:

R – кольцо   M – модуль (левый), если   M – абелева группа

$R \times M \to M$ (действие)
$(r, m) \mapsto rm$

т.ч. $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
$(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$
$r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$.

Представление = Модуль над алгеброй $A / \mathbb{k}$.

$\begin{cases} M \text{ – вект. пр-во } / \mathbb{k} \quad + \\ \text{действие: } A \otimes_{\mathbb{k}} M \to M \end{cases}$

$A \times M \qquad M$
$(a, m) \qquad \downarrow$
$a \otimes m \to am$.

условие согласования (ассоциативность:)
$(ab)m = a(bm)$
$(a+b)m = am + bm$
...

Опр. Вект пр-во $/_{\mathbb{K}} V$ с отображением действия $\rho: G\times V \to V$ наз-ся представлением группы G, если определено действие группы G на V (в обычном смысле действия)

т.е. $(gh)v = g(hv)$.

такое что $\forall g\in G$ $\rho(g,-)$ - линейный оператор.

То есть задано г-зм групп. $\rho: G \to GL_{\mathbb{K}}(V)$.

Пример 0 $G \curvearrowright \mathbb{K}$. - тривиальное пр-ие

$\rho(g) = \mathrm{Id}$ $\forall g\in G$.

Определим алгебру ~~пр-во~~ $\mathbb{K}[G]$ с базисом $\{e_g \mid g\in G\}$.

умножение $e_g \cdot e_h = e_{gh}$. , $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G] = \# G$.

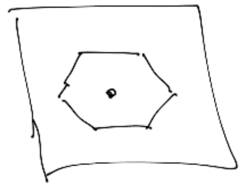
$\mathbb{K}[G]$ - групповая алгебра.

Пример 1 $G \curvearrowright \mathbb{K}[G]$ $g\cdot e_h := e_{gh}$.

соотв. пр-ие наз-ся $\underset{\text{(левое)}}{\ }$ регулярное пр-ие.

<u>Пример 2</u> D_n – группа симметрий n-угольника.

$D_n \curvearrowright \mathbb{R}^2$



Правильный n-уг. в $\mathbb{R}^2$ с центром в 0. Сим-и оставляют на месте центр. $\Rightarrow$ явл.-ся лин. опер-ами.

<u>Наблюдение</u> (пр-ия группы G над полем $\mathbb{K}$) $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ (модули (пр-ия) групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$.)

$\rho: G \times V \longrightarrow V$ линейно по V. $\overset{\text{огран. на базис}}{\longleftarrow}$ / $\longrightarrow$ продол. * по линейности $\rho: \mathbb{K}[G] \otimes V \to V$ линейность по $\mathbb{K}[G]$ в виду базиса индекс. G.

$(g, v) \to gv$ $\rightsquigarrow$ $(e_g \otimes v \to gv)$

$(gh)v = g(hv)$ $(e_g e_h)(v) = e_{gh} v$.

$\rho: A \times M \longrightarrow M$ / $\mathbb{K}$. Все отобр $\mathbb{K}$-лин. т.е. по каждому из арг. $\Leftrightarrow$ $A \otimes M \to M$.

$(a, m) \longrightarrow am$.

$\rho\left(\sum a_i \otimes m_i\right) = \sum_i a_i m_i$

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r] & M \\ A \times M \arrow[u, "\mathbb{K}"] \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Замеч. Мн-во пр-ий A-mod / G-mod – объекты, образуют категорию: $\mathrm{Reps}_{\Bbbk}(G)$.

$A\text{-mod} = \mathrm{Reps}(A)$

Как устроены морфизмы в этой категории:

$\boxed{\text{в } \mathrm{Reps}_{\Bbbk}(G)}$: $(V, \rho_V) \overset{\psi}{\dashrightarrow} (W, \rho_W)$

ψ — $\Bbbk$-лин. отображение, согласованное с действием группы.

Условие согласования:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\psi"] & W \end{tikzcd}$$

$\rho_W(g) \circ \psi = \psi \circ \rho_V(g) \quad \forall g \in G.$

в A-mod

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "a"'] & W \arrow[d, "a"] \\ V \arrow[r, "\psi"'] & W \end{tikzcd}$$

$a\psi = \psi a \quad \forall a \in A.$

Изо-зм. – биективный морфизм.

$\Leftrightarrow$ есть обратный (который тоже морфизм пр-ий).

Цель — описание объектов этой категории с точностью до из-зма.

Упраж. Если $G = \{e\}$.

Тогда $\mathrm{Reps}_{\Bbbk}(\{e\}) = \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$.

Пример 1. $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\quad \mathrm{Reps}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Задать пр-ие $G \Longleftrightarrow$ групповой алг-ры $\Bbbk[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \simeq \Bbbk[x]/(x^n - 1)$.

$$\begin{array}{cccccc} [0]_n, & [1]_n, & \dots, & [n-1]_n & [n]_n = & [0]_n \\ \shortparallel & \shortparallel & & & \shortparallel & \shortparallel \\ e & x & x^2 \dots & x^{n-1} & x^n & 1 \end{array}$$

Тогда $\overbrace{\text{пр-ие}}^{\text{задать}}$ алг-ры $\Bbbk[x]/(x^n - 1)$ в вект пр-ве V,

тоже самое, что задать оператор $C \curvearrowright V$, т.ч. $C^n = \mathrm{Id}_V$.

Над $\mathbb{C}$ такой оператор диагонализуем. и собств знач $= \sqrt[n]{1}$.

$$C \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_k \end{pmatrix} \qquad \zeta_i^n = 1. \ \forall i = 1, \dots k.$$

Тогда $V \simeq \mathbb{C}_{\zeta_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}_{\zeta_k}$ Изоморфно прямой сумме пр-ий

Опр. Модуль (Представление) V наз-ся разложимым, если $V \simeq V_1 \oplus V_2$ (на прямой сумме действие блочные: $\rho_V(g) = \left(\begin{array}{c|c} \rho_{V_1}(g) & 0 \\ \hline 0 & \rho_{V_2}(g) \end{array}\right)$)

Опр. V наз-ся неприводимым (=простым) если V не содержит нетривиальных собств. подмодулей (подпр-ий).

$\mathrm{Reps}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ неразложимые = одномерные $\mathbb{C}_\zeta$ $\zeta^n = 1$
всего n разных (неизоморфных).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\zeta & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}_\eta \\ {\scriptstyle \zeta = x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x = \eta} \\ \mathbb{C}_\zeta & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}_\eta \end{array}$$

$\psi x = x \psi \iff \zeta = \eta$.

Неразл. одномерн $\Rightarrow$ неприводимы.
Любое пр-ие $\simeq \oplus$ неприводимых (Полупростота).

Замеч. Если $(V, \rho_V) \simeq (W, \rho_W)$ то м-цы $\rho_V(g)$ и $\rho_W(g)$ подобны.
т.е. имеют одинаковую ЖНФ (собств. знач).

Опр. Пр-ие V наз-ся полупростым, если
$\forall$ подпр-ия $W \subset V$ $\exists$ подпр-ие $U \subset V$ т.ч. $V \simeq U \oplus W$.
(доказывали раньше) это эквивалентно
$\Longleftrightarrow$ $V \simeq + V_i$ своих неприв. подпр-ий
$\Longleftrightarrow$ $V \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ каких-то неприв. подпр-ий.

Теор. (Машке) Категория $Reps_{\mathbb{k}}(G)$ полупроста, если $\operatorname{char} \mathbb{k} \nmid \# G$.
(т.е. каждое конечномерное пр-ие G над $\mathbb{k}$ разлагается в прямую сумму неприводимых).

То есть в $Vect_{\mathbb{k}}$ всё, что нужно знать о вект пр-ве V это его размерность.
в $Reps_{\mathbb{k}}(G)$ $V \simeq \oplus V_i^{m_i}$ нужно знать список неприводимых $V_i = V_i(G)$. и кратности вхождения каждого неприводимого в V.
$\dim V_i > 1$.

<u>Д-во</u> (теор Машке) Пусть (V, ρ_V) – пр-ие G. (конечной)

$$\begin{gathered}(V, \rho_V)\\ \cup \\ (W, \rho_V|_W).\end{gathered}$$

Выберем Π-проектор на W, т.е. $\Pi : V \longrightarrow V$

т.ч. $\operatorname{Im}\Pi = W$, $\Pi|_W = \mathrm{Id}_W$.

т.е. $V = W \oplus U$ Π-проектор вдоль U.

U – не инвариантно отн действие гр-пы G.

Возьмём $\Pi_G := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_V(g)\,\Pi\,\rho_V(g)^{-1}$ $\frac{1}{|G|} \in \mathbb{K}$, т.к. $\#G \not\vdots \operatorname{char}\mathbb{K}$.

<u>Утв</u> Π_G – инвариантный (т.е. ~~гомо~~эндоморфизм пр-ий)

$$\forall h \in G \quad \Pi_G \circ \rho_V(h) \overset{?}{=} \rho_V(h) \circ \Pi_G$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_V(g)\,\Pi\,\rho_V(g)^{-1}\rho_V(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} \rho(hk)\,\Pi\,\rho_V(k)^{-1} = \rho_V(h)\frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\rho_V(k)\,\Pi\,\rho_V(k)^{-1}$$

$\rho(hk) = \rho_V(h)\rho_V(k)$

$g^{-1}h = k^{-1} \iff g = hk$

$h = gk^{-1}$

Итого $V \supset W$

$\pi : V \to V$ проектор на W $\quad \mathrm{Im}\,\pi = W$

$\pi_G : V \to V$ проектор на W т.е. $\pi_G\big|_W = \mathrm{Id}\big|_W$.

$\forall g \in G$ $\rho(g)$ оставл. W на месте.

$$\rho(g)\pi\rho(g)^{-1}\Big|_W = \rho(g)\,\mathrm{Id}_W\,\rho(g)^{-1} = \underline{\underline{\mathrm{Id}_W}}.$$

$$\pi_G^2 = \pi_G \Leftrightarrow \pi_G(\pi_G - 1) = 0.$$

$$\underbrace{\pi_G}_{\mathrm{Id}_W} \circ \underbrace{\pi_G}_{\mathrm{Im}\,\pi_G \subset W.} = \frac{1}{|G|^2}\sum_{\substack{g\in G\\ h\in G}} \rho_V(g)\underbrace{\pi\rho_V(g)^{-1}}_{\mathrm{Id}_W}\rho_V(h)\underbrace{\pi\rho_V(h)^{-1}}_{\subset W} = \pi_G.$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\pi_G$ = инвариантное подпр-во

$\Rightarrow V \simeq W \oplus \mathrm{Ker}\,\pi_G \Rightarrow V$ – полупросто. ∎

Пример. $\mathrm{Reps}_{\mathbb{k}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq$ Неприв. $\mathbb{C}_3$ / $\mathbb{C}$.

$\mathrm{Reps}_{\mathbb{k}}\ \mathbb{k}[x]/(x^n-1)$.

$$\mathbb{R}[x]/(x^n-1) \simeq \mathbb{R}[x]/(x-1) \oplus \begin{cases} \mathbb{R}[x]/x+1, \text{ если } n=2k. \\ \mathbb{R}[x]/x^2-2\cos\varphi\, x+1 \\ \varphi=\frac{2\pi k}{n}. \end{cases}$$

$\mathrm{Reps}_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{Q}[x]/(x^n-1)$

$$\langle e^{i\frac{2\pi k}{n}}, e^{-\frac{2\pi k i}{n}} \rangle$$

Мн-н $x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x)$, $\Phi_d(x)=\prod(x-\zeta)$.

Φ_d неприводим / $\mathbb{Q}$.

ζ-прим корень d-ой степени из 1

$$\underline{\underline{\mathbb{Q}[x]/(x^n-1)}} \simeq \bigoplus_{d|n} \underbrace{\mathbb{Q}[x]/\Phi_d(x)}_{\text{неп-ые пр-ия } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ над } \mathbb{Q}}$$

неп-ые пр-ия $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Q}$.

Ответ / $\mathbb{C}$ Неприв. пр-ия $G\times H$ это $V\otimes W$

V — пр-ие G, W — пр-ие H

Пример пр-ий неабелевой группы.

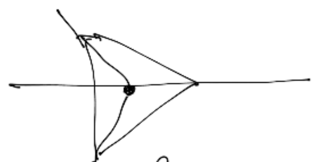
$S_3 = D_3$ Её пр-ия над $\mathbb{C}$ / $\mathbb{R}$ / $\mathbb{Q}$ которые знаем.

1) тривиальное : $S_3 \to \{e\}$ $\mathbb{C}$ все элементы действуют тожд.

2) знаковое : $\rho: S_3 \to \{\pm 1\} \subset \mathbb{C}^* = GL_1(\mathbb{C})$.

$\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$.

3) Симметрии треугольника



пр-ие над $\mathbb{R}$ (в базисе)

Утв это полный список неприв. пр-ий.

Д-во: $S_3 = \langle \underset{s}{(12)}, \underset{R}{(123)} \rangle = \langle s, R \mid s^2 = R^3 = e,\ sR = R^{-1}s \rangle$.

Чтобы задать пр-ие S_3 на V. предъявить 2 оператора $A = \rho_V(s)$, $B = \rho_V(R)$

т.ч. $A^2 = B^3 = Id$, $AB = B^{-1}A$.

Ищем лин. опер A, B : $A^2 = B^3 = E$, $AB = B^{-1}A$.

т.к. $B^3 = E \Rightarrow B$ - диагонализуем в каком-то базисе.

собств. зн-ия $/_{\mathbb{C}}$: $1, \omega, \overline{\omega}$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Если v - вект. с собств знач. 1, $\Leftrightarrow Bv = v$.

тогда $BAv = AB^{-1}v = Av \Rightarrow$ вектор Av тоже с собств. знач. 1

$\Rightarrow U = \{v \mid Bv = v\}$ - ин-но отн. A, B

Оператор $A|_U$ - диагонализуем, его собств знач. ± 1.

тем самым 2 неиз. одн. пр-ия : $B = Id$, $A = \pm Id$.

Если $Bv = \omega v$ тогда $BAv = AB^{-1}v = A\omega^{-1}v = \omega^{-1}Av$.

$B(Av) = \omega^{-1}(Av)$ $\Rightarrow$ вектора v, Av — линейно независимы.

Вект. пр-во натянутое на $\langle v, Av\rangle = U$ — инвариантно.

т.к. $A^2 = E$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — непривод двум. подпр-ие.

$B = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$ (подпр-ие $\dim = 1$ — инвар. прямые).

$U = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. ($\Leftarrow$) одновременно диагонализуемы.

Это все пр-ия S_3.