Лекция 13 | Тема: Характеры пр-ий конечных групп $/\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Сегодня}}$

В прошлые разы: G – конечная группа

$$\mathrm{Reps}\, G \longleftrightarrow \mathrm{Reps}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G]) \text{ групповой алгебры.}$$
$$\mathbb{C}[G]\text{-mod}. \quad (\mathrm{mod} = \mathrm{Reps}).$$

Два центральных факта:

Т-ма Машке: (полупростота) $V \subset W$, то на W есть инв. эрм. ф-ма и $W \simeq V \oplus V^{\perp}$, как G-mod.

Лемма Шура ($/\mathbb{C}$) над алг. замкн. полем. $\pi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ где V, W – неприв.

то $\begin{cases} \pi = 0, & \text{если } V \not\simeq W. \\ \pi = \lambda \mathrm{Id}, & \text{если } V \simeq W. \end{cases}$

Опр. Пусть $(V, \rho_V) \in Reps_{\mathbb{C}}(G)$, тогда $\chi_V : G \to \mathbb{C}$
$\rho_V : G \to End(V)$ $\qquad g \to tr(\rho_V(g))$
наз-ся характером пр-ия V.

Св-ва: 1) $\underset{\parallel}{\chi_V(gh)} = \underset{\parallel}{\chi_V(hg)} \Leftrightarrow \chi_V(g) = \chi_V(hgh^{-1})$
$tr(gh) = tr(hg)$
т.е. χ_V - ф-ия постоянная на классах сопряжённости
(Такие ф-ии наз-ся центральными).
Кол-во лин. нез. центральных (характеров) ф-ий $\leq$ # классов сопр. в G.
Базис в пр-ве центральных ф-ий состоит из $\delta_C : G \to C$ $\qquad \delta_C(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases}$.

Св-во 2 Если $V \simeq W$ то $\chi_V \equiv \chi_W$ (т.к. след не зависит от выбора базиса).

Св-во 3. $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$; $\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g) \cdot \chi_W(g)$. (св-ва следа).

Теор. Верно обратное к св-ву 2.

т.е. если $\underline{\underline{\chi_V \equiv \chi_W}} \Longrightarrow V \simeq W$

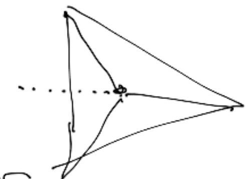
$V, W \in \mathrm{Reps}(G)$

Мораль Характер однозначно определяет пр-ие.
В частности, можете восстановить разложение на неприводимые

Пример. Группа S_3: $\mathrm{Sym}(\Delta)$.

	$\mathbb{1}$	Sgn	V_2	$V_2 \otimes V_2$
e	1	1	2	4
(12)	1	-1	0	0
(123)	1	1	-1	1

классы сопряжёности = цикловой тип



$T_2(R_{2\pi/3}) = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

Вопрос:

$V_2 \otimes V_2$ - разложить на пр-ия

$$\chi_{V_2\otimes V_2} = \chi_{V_2}\cdot\chi_{V_2} = \chi_{V_2} + \chi_{\mathbb{1}} + \chi_{\mathrm{Sgn}}.$$

$$= \chi_{V_2 \oplus \mathbb{1} \oplus \mathrm{Sgn}}.$$

По Теор. $\Longrightarrow V_2 \otimes V_2 \simeq V_2 \oplus \mathbb{1} \oplus \mathrm{Sgn}$.

<u>Более сильная ф-ка Теоремы</u> (Соотношение ортогональности χ-ов.

Х-ры неприводимых пр-ий (группы G) образуют <u>ортонормированный базис</u> в пр-ве центральных функций на G относительно (= пост. на классах сопр) эрмитова скалярного пр-ия:

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underset{\mathbb{C}}{\varphi(g)} \cdot \underset{\mathbb{C}}{\overline{\psi(g)}}$$

, $\varphi, \psi \in \mathbb{C}$-знач. ф-ии на G : $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$.

<u>Замечание</u> $\langle \varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$ эрмитово, полож. опред. т.к. $\langle \delta_C, \delta_{C'} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \delta_C(g) \cdot \delta_{C'}(g) = \begin{cases} 0, \text{если } C \neq C' \\ \frac{|C|}{|G|}, \text{если } C = C' \end{cases}$

δ_C = х-кая ф-ия класса сопр. C.

<u>Остаётся</u> н-ть, что для непр. V, W

$$\boxed{\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1, \text{ если } V \simeq W \\ 0, \text{ если } V \not\simeq W \end{cases}} \quad (*)$$

+ любая центр ф-ия - есть линейная комбинация характеров.

Технические леммы перед д-вом. линейное отобр (не гом-зм). (между неприводимыми G-предст.)

Лемма 1. Пусть $\pi : V \longrightarrow W$
$\pi \in Hom_G(V, W)$

тогда $\pi_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_W(g) \pi \rho_V(g^{-1}) \in Hom_G(V, W)$

$$\pi_G = \begin{cases} \lambda Id_V, & V \simeq W \\ 0, & V \not\simeq W \end{cases}, \quad \lambda = \frac{tr\,\pi}{\dim V}.$$

Д-во: Покажем, что $\pi_G \circ \rho_V(g) \stackrel{?}{=} \rho_W(g) \circ \pi \quad \forall g \in G.$

$$\pi_G \circ \rho_V(g) = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h \pi h^{-1}\right) g = \frac{1}{|G|} \sum_{h_1 \in G} g h_1 \pi h_1^{-1} = g \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{h_1 \in G} h_1 \pi h_1^{-1}.$$

$h^{-1} g = h_1^{-1} \Leftrightarrow h = g h_1$

$\Rightarrow$ По лемме Шура π_G - из-зм или $\equiv 0$.
(λId_V)

Для вычисления λ достаточно вычислить $tr(\pi_G) = tr(\lambda Id) = \lambda\, tr(Id) = \lambda \dim V.$

$$tr(\pi_G) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} tr(h \pi h^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} tr\,\pi = tr\,\pi.$$

Применим Лемма 1 для матричной единицы:

Зафиксируем в каждом неприводимом пр-ии базис. $V, W \in Irreps(G)$

$$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \qquad W = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

$A_{i_0 j_0} : e_{j_0} \longrightarrow f_{i_0}$ (остальное в 0).

Что такое усреднение $A^G_{i_0 j_0} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_W(g) A_{i_0 j_0} \rho_V(g^{-1})$

$$\left(A^G_{i_0 j_0}\right)_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G \\ s,t}} \rho_W(g)_{is} \underbrace{\left(A_{i_0 j_0}\right)_{st}}_{\text{матричная единица}} \rho_V(g^{-1})_{tj} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_W(g)_{i i_0} \rho_V(g^{-1})_{j_0 j}.$$

С другой стороны

$$A^G_{i_0 j_0} = \begin{cases} \lambda \, Id_V, & V = W \\ 0, & V \neq W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Если } V \neq W, \text{ то } \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_W(g)_{i i_0} \rho_V(g^{-1})_{j_0 j} = 0 \quad (*1) \\ \text{Если } \underline{V = W}, \text{ то} \\ * \ \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g)_{i i_0} \rho_V(g^{-1})_{j_0 j} = 0, \ i \neq j \quad (*2) \\ = \frac{\delta_{i_0 j_0}}{\dim V}, \ i = j. \quad (*3) \end{cases}$$

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} tr(\rho_V(g)) \cdot \overline{tr(\rho_W(g))} \overset{(*)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} tr(\rho_V(g)) \cdot tr(\rho_W(g^{-1})) \overset{*}{=}$$

(*) $\overline{tr(\rho_V(g))} = tr(\rho_V(g^{-1}))$.

т.к. $\rho_V(g)$ – диагонализуемая м-ца, все собств. знач. которой корни из 1. т.к. $g^k = 1$, где $k = ord(g)$.

$\rho_V(g^{-1}) = \overline{\rho_V(g)}$. в этом базисе.

$\rho_V(g)$ – м-ца удовл. ур-ию $x^k - 1 = 0$ $\quad x^k - 1 = \prod_{\xi^k=1} (x - \xi)$ – не имеет кратных корней

$$\overset{*}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \sum_{i,j} \rho_V(g)_{ii} \, \rho_W(g^{-1})_{jj} = \sum_{i,j} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \rho_V(g)_{ii} \, \rho_W(g^{-1})_{jj} \right) = \begin{cases} 0, & V \neq W \end{cases}$$

если $V = W$ $\quad = \sum_{i=1}^{\dim V} \frac{1}{\dim V} = 1$. ∎

Покажем, что из того, что $\langle \psi, \chi_V \rangle = 0$ $\forall$ неприводимого пр-ия V

следует, что центр. ф-ия $\psi \equiv 0$.

Д-во от противного:

Пусть ψ - такая центр. ф-ия

$$\psi_G^{V \oplus W} = \psi_G^V \oplus \psi_G^W$$

Построим по пр-ию (V, ρ) элемент $\psi_G^V := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \cdot \rho_V(g^{-1})$.

Тогда $\psi_G \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ - эндоморфизм G-mod.

т.е. $\psi_G \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \psi_G \iff \psi_G = g \psi_G g^{-1}$

$$g \psi_G g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(h)\, g h g^{-1} \underset{h_1 = g h g^{-1}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{h_1 \in G} \psi(g^{-1} h_1 g)\, h_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{h_1 \in G} \psi(h_1)\, h_1 = \psi_G$$

т.к. ψ - центральная

$\Rightarrow$ Если V - неприв. то $\psi_G = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{\langle \psi, \chi_V \rangle}{\dim V}$.

$$tr(\psi_G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g)\, tr(\rho_V(g^{-1})) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \overline{\chi_V(g)} = \langle \psi, \chi_V \rangle.$$

В результате, если $\langle \psi, \chi_V \rangle = 0 \Rightarrow \psi_G = 0.$

$\Rightarrow$ Если $\langle \psi, \chi_{V_i} \rangle = 0$ для всех $i \in \mathrm{Irrep}(G)$.

$\Rightarrow \langle \psi, \chi_W \rangle 0$ $\quad W = \underbrace{V_1 \oplus \ldots \oplus V_1}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \underbrace{V_k \oplus \ldots \oplus V_k}_{m_k}$

$\psi^G_{V \oplus W} = \psi^G_V \oplus \psi^G_W$ $\quad \psi^G_W = \sum_i m_i \psi^G_{V_i} = \sum_i m_i \cdot 0 = 0.$

$\Rightarrow \psi^G_W \equiv 0$ для любого пр-ия $W \in \mathrm{Reps}(G)$.

базис из эл-ов группы.

В частности, для $W = \mathbb{C}G. = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$

базис.

что такое $\psi^G_{\mathbb{C}G} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \cdot L_{g^{-1}} \Rightarrow \psi^G_{\mathbb{C}G}(1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \cdot g^{-1} = 0.$

$\Rightarrow \psi(g) = 0 \quad \forall g \in G.$

$\Rightarrow \psi \equiv 0.$

$\square$

Сл-ие # неприводимых пр-ий = # классов сопряженности.
= dim пр-во центр. ф-ий.

Сухой остаток от пр-ий группы G
это таблица характеров:

S_3	$\mathbb{1}$	Sgn	V_2
e	1	1	2
(12)	1	−1	0
(123)	1	1	−1

класс сопр

← ортогональная матрица.

$$\langle\, , \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\overline{\chi_W(g)} =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{\substack{\text{классы} \\ C\text{-сопр.}}} |C|\cdot\chi_V(C)\cdot\overline{\chi_W(C)}.$$

$$\langle\chi_{V_2},\chi_{V_2}\rangle = \frac{1}{6}\left(2\cdot2\cdot1+0+(-1)\cdot(-1)\cdot2\right) = \frac{1}{6}\cdot(4+2) = 1.$$

По строкам
$$\sum_{V\in Irrep}\chi_V(s)\cdot\chi_V(t) = \begin{cases}\dfrac{|G|}{|C|}, & \text{если } s,t\in C\\ 0, & \text{~~если~~ иначе.}\end{cases} \quad s,t\in G$$

Если известно χ_V то $\boxed{\chi_V = \sum_{i \in \mathrm{Irrep}\, G} \langle \chi_V, \chi_i \rangle \chi_i}$

$$\Rightarrow \quad V \simeq V_i^{\langle \chi_V, \chi_i \rangle}.$$

Число $\langle \chi_V, \chi_i \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

<u>Сл-ие</u> $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = c(V,W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V,W)$.

<u>Д-во:</u> $\chi_V = \sum m_i \chi_i$

$\chi_W = \sum n_i \chi_i$

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \sum_{i,j} m_i n_j \underbrace{\langle \chi_i, \chi_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i,j} m_i n_j \delta_{ij} =$$

$$= \sum_i m_i n_i = \dim \mathrm{Hom}_G \left(\oplus V_i^{m_i}, \oplus V_i^{n_i}\right)$$

$\square$

Х-ры квазирегулярных пр-ий считать легко. (упр).

<u>Зам.</u> $\chi_{\mathbb{C}G}(g) = \mathrm{tr} L_g = \begin{cases} 0, & g \neq e \\ |G|, & g = e. \end{cases}$

$\chi_{\mathbb{C}X}$

К прошлой лекции: таблица квазирег. ф-ий для S_4, выписать все х-ры $\Rightarrow$ все неприв. х-ры. $\square$.

Z – пр-во центр. ф-ий.

$\langle\, ,\, \rangle$ – эрмит. пол. опр. проверяем на базисе δ_C $\quad \langle \delta_C, \delta_{C'} \rangle = \delta_{C,C'} \cdot \frac{|C|}{|G|}$

$\langle \chi_1, \dots, \chi_d \rangle \subset Z = (\quad) \oplus (\quad)^{\perp}$

подпр-во пор. х-ами.

ψ

Какие способы определять список неприводим. для G.

- $\#$ неприв $=$ $\#$ классов сопр.
- $\# G = \sum\limits_{i \in I_{irrep}} (\dim V_i)^2$
- $\#$ одном. $= \# G/G'$.
- Утв. $\dim V \mid \# G$

Напр. Выписать неприв для $Heis_p = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_p)$

$\# Heis_p = p^3$.

$\# Heis_p' = p$.

$\# 1 \dim = p^2$

$$\Rightarrow \quad p^3 = p^2 \cdot 1 + \underbrace{}_{p-1} \cdot p^2 + \cancel{\underbrace{}(p^2)^2}$$

$\# p$-мерн. пр-ий