Лекция по алгебре в НМУ.

Продолжение рассказа о симметрических ф-циях и приложениях.

$$\Lambda_n := \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Теор. 1) $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{Z}\langle m_\lambda \rangle$

где $m_\lambda = \mathrm{Sym}(x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n})$, $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_n)$

λ - разбиение (диаграмма Юнга) $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$.

$\lambda \vdash n \Leftrightarrow \sum \lambda_i = n.$

Теор. 1) m_λ – базис в $\mathbb{Z}[x_1 \dots x_n]^{S_n} = \Lambda_n$

2) $e_\lambda = e_{\lambda_1^t} \cdot \ldots \cdot e_{\lambda_n^t}$ – базис в Λ_n,

3) $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n]$.

Ф-ла (Виета) $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i t) = 1 + te + t^2 e^2 + \ldots + t^n e_n = E(t)$

Если t – формальный параметр.

Производящая ф-ия элем. сим. мн-нов.

$E(t) \in \mathbb{Z}[t, x_1, \dots, x_n]$
$\in \mathbb{Z}[t, x_1 \dots x_n]^{S_n}$

Ссылка на главную лит-ра по сим. ф-ия
Макдональд „Симм. ф-ии и ортогон. мн-ны".

$$E(t) = \sum_{k=0}^{n} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n} (1+x_i t), \quad e_k = \sum_{i_1<\dots<i_k} x_{i_1}\dots x_{i_k}$$

элементарные

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k \overset{?}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i t} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_i t + x_i^2 t^2 + x_i^3 t^3 + \dots\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \Big(\underbrace{\sum x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}}_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=k}\Big).$$

$$h_k = \sum_{i_1\le\dots\le i_k} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k} =$$

полные сим. ф-ции

$$= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$$

$$\alpha_1 = \#\{j \mid i_j = 1\}$$
$$\alpha_2 = \#\{j \mid i_j = 2\}$$

$$\boxed{E(t)\cdot H(-t) = \prod_{i=1}^{n} (1+x_i t)\cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i t} = 1}$$

Раскрыв коэф при t^n: $\left(\sum e_k h_{n-k} (-1)^{n-k}\right) = 0 \quad n>0$

Сл-ие h_n – выр-ся через $e_1, \dots, e_n$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n] =$

e_n – выр-ся через $h_1, \dots, h_n$ $= \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n]$.

$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ – суммы Ньютона.

(Напомним.)

Если e_i – к-ты характ. мн-на матрица A, то $p_i = \operatorname{tr} A^k$.

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} (t x_i)^k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{t x_i}{1 - t x_i} = \sum_{i=1}^{n} t \frac{\partial}{\partial t} \ln (1 - t x_i)^{-1} = t \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1} \ln (1 - t x_i)^{-1} =$$

$$= t \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\prod_{i=1}^{n} (1 - t x_i)^{-1} \right) = t \frac{\partial}{\partial t} \ln H(t).$$

$$\Rightarrow H(t) \underset{\Uparrow}{=} e^{\int \frac{p(t)dt}{t}} = e^{\int \sum_{k=1}^{\infty} p_k t^{k-1} dt} = e^{\sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{t^k}{k}}$$

$$p(t) = t \frac{\partial}{\partial t} \ln H(t)$$

<u>Сл-ие</u> p_k - выражаются через e_k.

e_k - выражаются через p_k (с рац. коэфф.)

$$e_2 = x_1 x_2 = \frac{1}{2}\left((x_1+x_2)^2 - (x_1^2+x_2^2)\right) = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2).$$

$$\mathbb{Z}[e_1, \dots, e_k] \not\supseteq \mathbb{Z}[p_1, \dots, p_k]$$

$$\mathbb{Q}[e_1, \dots, e_k] = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_k].$$

<u>Сл-ие</u> Если $A \in M_n(\mathbb{Q}) \Rightarrow p_k = \operatorname{tr} A^k \rightsquigarrow \chi_A(t) = \dots e_k \cdot t^k$ по ним восстан.

Сл-ие Базис в $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]^{S_n}$ = образуют $\{ p_\lambda(x_1,\dots,x_n) = p_{\lambda_1}\cdot p_{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot p_{\lambda_n} \quad \lambda=(\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_n).\}$

Ещё один базис в Λ_n = состоит из ф-ций Шура $\boxed{s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}}$. $\lambda=(\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_n\geq 0)$.

$\delta=(n-1,n-2,n-3,\dots,1,0)$.

$\lambda+\delta=(\lambda_1+n-1>\lambda_2+n-2>\ldots>\lambda_{n-1}+1\geqslant\lambda_n)$.

Упр.

$a_\alpha = \det(x_i^{\alpha_j}) \qquad \alpha=(\alpha_1>\ldots>\alpha_n)$.

кососимм. ф-ия от $(x_1,\dots,x_n)$.

$$a_\alpha(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma a_\alpha(x_1,\dots x_n).$$

$$a_\delta = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & & x_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 \end{vmatrix}$$ – опр-ль Вандермонда $\Delta(x_1,\dots x_n) = \prod_{i<j}(x_i-x_j)$. $\square$

Приложение 1

Основная теорема алгебры:

Ф-ка 1. Поле $\mathbb{C}$ - алгебраически замкнуто

т.е. любой мн-н $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ имеет комплексный корень.

$\Leftrightarrow$ раскладывается на линейные мн-ны.

$f(\alpha)=0 \Rightarrow f(x)=(x-\alpha)\cdot g(x)$.

Ф-ка 2 Любой мн-н $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ имеет комплексный корень.

$f(x) \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow f(x)\cdot\bar{f}(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Если $\alpha \in \mathbb{C}$ $f(\alpha)=0 \Rightarrow f(\bar{\alpha})=0$, т.е $\bar{\alpha}$ корень $f(x)$.

Ф-ка 2' Любой мн-н $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ раскладывается на линейные и квадратичные мн-лы.

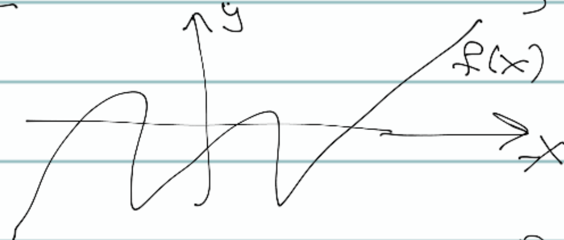
Д-во $f(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0$.

по индукции по числу k. $\deg f(x) = 2^k \cdot (2m+1)$

База индукции: $\deg f(x) = 2m+1$ — нечётное число,

то $f(x)$ — имеет веществ. корень. (Утв. из анализа).

$f(x) = x^{2m+1} + \ldots \Rightarrow$



$f(x) > 0 \quad x >> 0$

$f(x) < 0 \quad x << 0$.

$\Rightarrow$ по теор. о пром. значении $\exists\, a \in \mathbb{R} : f(a) = 0$

Шаг индукции

$$f(x) = \prod_{i=1}^{d} (x - \alpha_i) \qquad d = 2^k (2m+1).$$

Числа α_i принадлежат какому-то большому полю $L \supset \mathbb{R}$.

Задача показать, что $\exists\, i : \alpha_i \in \mathbb{C}$

$f(x) = x^n + e_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n e_n = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ $\qquad \underline{e_k = e_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}}$.

$g_t(x) := \prod_{i<j}\left(x - \left((\alpha_i+\alpha_j) + t\alpha_i\alpha_j\right)\right) \leftarrow$ корни $(\alpha_i+\alpha_j) + t(\alpha_i\alpha_j)$.

$\in \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}[x]$, т.к. все его коэф-ты — симметр. ф-ции от $\alpha_1 \ldots \alpha_n$.

$\deg(g_t(x)) = \binom{d}{2} = \frac{d\cdot(d-1)}{2} = \frac{2^k(2m+1)\cdot(2^k(2m+1)-1)}{2} = 2^{k-1}\cdot(2N+1)$

По предполож. индукции у $g_t(x)$ имеется комплексный корень.

$\exists i<j: \quad (\alpha_i+\alpha_j) + t\cdot\alpha_i\alpha_j \in \mathbb{C}$.

Поскольку $t\in\mathbb{R}$ — бесконечно много $\Rightarrow \exists\, \underline{i<j},\ \underline{t_1} \neq \underline{t_2}$ $(\neq 0, \neq 0)$:

$$\begin{cases}(\alpha_i+\alpha_j)+t_1\alpha_i\alpha_j \in \mathbb{C}\\ (\alpha_i+\alpha_j)+t_2\alpha_i\alpha_j\in\mathbb{C}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\alpha_i+\alpha_j)\in\mathbb{C}\\ \alpha_i\alpha_j\in\mathbb{C}\end{cases} \Rightarrow x^2-(\alpha_i+\alpha_j)x+\alpha_i\alpha_j\in\mathbb{C}[x].$$

имеет корень в $\mathbb{C}$

т.к. любое квадр. ур-ие $x^2-bx+c=0$ имеет корни $-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2-4c}{4}}$ $\square$

Приложение 2 $\mathcal{D}(f) = \prod (\alpha_i - \alpha_j)^2 \in \mathbb{Z}[a_1, \dots a_n]$ - Дискриминант,
$\mathcal{D}(f) = 0 \Leftrightarrow f$ - имеет кратный корень.

Приложение 3 $R(f, g)$ - результант мн-нов f, g. $\in \mathbb{Z}[a_1, \dots a_n, b_1 \dots b_m]$.

Если $f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 \prod (x - \alpha_i)$

$g = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m = b_0 \prod (x - \beta_j)$

$\boxed{R(f, g) = 0 \Leftrightarrow f, g \text{ имеют общий корень.}}$ в возможно большем поле.

$$\underline{R(f, g)} = a_0^m b_0^n \underbrace{\prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)}_{=} \in \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots \alpha_n]^{S_n}[\beta_1, \dots \beta_m]^{S_m} = \mathbb{Z}[a_0, a_1, \dots a_n, b_0, b_1 \dots b_m].$$

Замечание Найти корни мн-на, зная его коэф. алг. не разр. задача.

Другие ф-лы для результанта:

Теор

$$R(f, g) = \det \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ 0 & a_0 & \dots & & a_n & \\ 0 & 0 & & & & \\ b_0 & \dots & & b_m & & \\ 0 & b_0 & \dots & & b_m & \\ 0 & 0 & & & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \} m \\ \\ \} n \end{matrix}$$

М-ца Сильвестра.

Ф-ла Сильвестра.

Д-во (ф-ла Силвестра). $\mathbb{K}[x]_{<n}$ = мн-ны $\deg < n$.

$$\varphi : (\mathbb{K}[x]_{<m}, \mathbb{K}[x]_{<n}) \longrightarrow \mathbb{K}[x]_{<n+m}$$
$$(A, B) \longrightarrow \underline{(Af+Bg)} \vdots \text{нод}(f,g).$$

$\dim(\quad) = m+n$ $\qquad\qquad$ $\dim = n+m.$

φ - из-зм $\iff$ φ - сюръекция. $\iff$ $\text{нод}(f,g)=1$ $\iff$ f,g не имеют кратных корней.

$\det(\varphi)$ в базисах:

$$((1,x,\dots x^{m-1});(1,x,\dots x^{n-1})) \longrightarrow (1,x,x^2,\dots, x^{n+m-1}).$$

$$\det \begin{array}{c|cc|cccc} & 1 & x & 1 & x & \dots & x^m \\ \hline 1 & a_n & 0 & b_n & 0 & & \\ x & a_{n-1} & a_n & \vdots & b_n & \ddots & \\ x^2 & \vdots & a_{n-1} & & \vdots & & \\ \vdots & a_0 & \vdots & b_0 & \vdots & & \\ x^n & & \vdots & 0 & b_0 & & \\ & & a_0 & & & & \end{array} = 0 \iff f,g \text{ не имеют кратных корней.}$$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

□.

Св-ва результанта.

1) $R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le m}} (\alpha_i - \beta_j) = a_0^m \cdot \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \in \mathbb{Z}[a_0,\dots,a_n, b_0,\dots,b_m]$

$g(x) = b_0 \cdot \prod_{j=1}^{m} (x-\beta_j) \Rightarrow g(\alpha_i) = b_0 \cdot \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j)$.

$\| \quad \pm b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j)$.

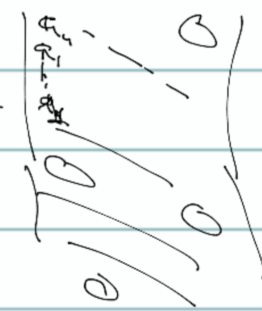
2) $\underline{R(f, f')} = 0 \overset{\text{Упр.}}{\Leftrightarrow} f$ — имеет кратный корень $\Leftrightarrow \underline{D(f) = 0}$.

$f \in \mathbb{R}[x]$.

$f' \in \mathbb{K}[x]$, если положить $\underline{(x^k)' = kx^{k-1}}$.

Упр. $R(f,f') \overset{?}{=} \pm a_0 \underline{D(f)}$ $\quad a_0 \ne 0$.

$a_0 = 1$ то $D(f) =$



Метод исключения переменных.

поле рац. ф-ий от x.

$f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Пусть $f, g \in \mathbb{K}[x,y] \subset \mathbb{K}(x)[y]$

$g(x) \in$

может быть и кольцо. (без дел. нуля).

Найти корни сист. ур-ий

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow Res_y(f,g)=0.$$

Тогда $Res_y(f,g) \in \mathbb{K}[x]$.

В итоге систему алгебр. ур-ий от 2-ух перем. свели к 1 уравн. большей степени от 1 перем.

Это обобщается на большее число переменных.

Пример

$$\begin{cases} f(x,y) = 4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3=0 \\ g(x,y) = 9x^2-14xy+y^2+28x-4y-5=0 \end{cases}$$

$$Res_y(f(y),g(y)) = \begin{vmatrix} 1 & -7x-2 & 4x^2+13x-3 & 0 \\ 0 & 1 & -7x-2 & 4x^2+13x-3 \\ 1 & -14x-4 & 9x^2+28x-5 & 0 \\ 0 & 1 & -14x-4 & 9x^2+28x-5 \end{vmatrix} = -24(x^4-x^3-4x^2+4x) = -24x\cdot(x-1)\cdot(x-2)(x+2)$$

Подставим корни в $f(x,y)$: $f(0,y) = y^2-2y-3 = (y-3)(y+1)$

$$g(0,3) = 3^2-4\cdot3-5 \neq 0$$
$$g(0,-1) = (-1)^2-4\cdot(-1)-5 = 0 \Rightarrow (0,-1) \text{ – решение.}$$

Подставляя остальные корни находим все решения: $(0,-1);\ (1,2);\ (2,3);\ (-2;1)$.