

Семинар 5. Эпиморфизм $SU_2 \rightarrow SO_3$

Через SU_2 обозначим группу унитарных матриц 2×2 с определителем 1. Соответственно, SO_3 — это группа (вещественных) ортогональных матриц 3×3 с определителем 1.

Задача 5.1. Докажите, что всякая матрица из SU_2 имеет вид $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$, где $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

Задача 5.2.

(а) Опишите жорданову и фробениусову нормальные формы элементов групп SO_3 и SU_2 .

(б) Докажите, что всякий элемент из группы SO_3 есть вращение ℓ_φ вокруг некоторой оси ℓ на некоторый угол φ .

Задача 5.3. Покажите, что эрмитовы матрицы со следом нуль образуют трёхмерное векторное пространство V над \mathbb{R} , форма $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$ задаёт на нём структуру евклидова пространства, а матрицы Паули $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ образуют в V ортогональный базис.

Задача 5.4. Для любого элемента $u \in U_2$ определено отображение $R_u: V \rightarrow V$, $R_u(X) = uXu^{-1}$. Покажите, что R_u — ортогональный оператор, а соответствие $u \rightarrow R_u$ задаёт гомоморфизм $R: U_2 \rightarrow O_3$.

Задача 5.5.

(а) (*Теорема Эйлера*). Зафиксируем в \mathbb{R}^3 ортонормированный репер $Oxyz$. Докажите, что любое вращение ℓ_φ есть композиция $Z_\gamma X_\beta Z_\alpha$ вращений вокруг Oz , Ox , Oz на углы α , β , γ соответственно.

(б) Пусть $u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$, $v_\psi = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi} \\ -e^{-i\psi} & 0 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $R_{u_\varphi/2} = X_\varphi$, $R_{v_\psi/2} = Z_\psi$. Выведите отсюда, что каждый элемент SO_3 имеет прообраз из SU_2 .

(в) Покажите, что при гомоморфизме R группа SU_2 отображается в точности на SO_3 , и опишите ядро построенного гомоморфизма $R: SU_2 \rightarrow SO_3$.