Семинар 6. Симметрические многочлены

Элементарной симметрической функцией $e_k(x_1, \ldots, x_n)$ называется $\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.
Соответственно, полной симметрической функцией $h_k(x_1, \ldots, x_n)$ называется $\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.

Задача 6.1. Пусть $E(t) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x_1, ..., x_k)t^k$ и $H(t) = \sum_{k=0}^{n} h_k(x_1, ..., x_k)t^k$.
(а) Покажите, что $E(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i t)$;
(б) Покажите, что $H(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t)^{-1}$;
(в) Докажите, $E(-t)H(t) = 1$;
(г) Докажите, что $e_k - h_1 e_{k-1} + h_2 e_{k-2} - \ldots + (-1)^k h_k = 0$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$.

Задача 6.2.
(а) Докажите, что дискриминант многочлена 4-ой степени $x^4 + px + q$ является целочисленной линейной комбинацией чисел p^4 и q^3;
(б) Вычислите соответствующий дискриминант, подставив несколько удобных значений для p и q, и решив подходящую систему линейных уравнений.

Задача 6.3. Известно, что характеристический многочлен 4×4-матрицы A равен $t^4 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$. Вычислите характеристический многочлен матрицы
(а) A^{-1}, **(б)** A^2.

Задача 6.4. Докажите, что
(а) комплексная матрица A – нильпотентна тогда и только тогда когда $\operatorname{tr} A^k = 0$ для любого $k > 0$.
(б) комплексные матрицы A и B порядка n имеют одинаковые характеристические многочлены если и только если $\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$ для $k = 1, \ldots, n$.
(в) полупростые операторы плотны в пространстве всех операторов (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).
(г) полиномиальная функция на матрицах однозначно восстанавливается своими значениями на полупростых матрицах. Выведите отсюда теорему Гамильтона-Кэли.