Семинар 9. Тензорное произведение и примеры Функторов

Задача 9.1. Пусть $\mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{R}}$ – категории векторных пространств над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ соответственно. Обозначим за

- $\mathsf{Real} : \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{R}}$ – функтор овеществления, который не меняет векторного пространства, как множество и помнит, как умножать на вещественные числа;
- $\mathsf{Compl} : \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}}$ – функтор комплексификации, сопоставляющий $V \mapsto \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$;
- $\mathsf{Conj} : \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}\mathsf{ect}_{\mathbb{C}}$ – функтор комплексного сопряжения ($V \mapsto \bar{V}$), который не меняет векторное пространство, как множество, но изменяет структуру $\mathbb{C}$-векторного пространства: умножение на $\lambda \in \mathbb{C}$ в $\bar{V}$ задается, как умножение на $\bar{\lambda}$ в V.

Проверьте, что перед вами действительно функторы и постройте изоморфизм функторов

$$\mathsf{Compl} \circ \mathsf{Real} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Id} \oplus \mathsf{Conj}.$$

Задача 9.2. Пусть $\Bbbk$ – подполе поля $\mathbb{F}$. Постройте канонические изоморфизмы
(а) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} V, \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} W) \simeq \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$;
(б) $(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} V) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} W) \simeq \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} (V \otimes_{\Bbbk} W)$.

Задача 9.3. Докажите, что
(а) $\mathbb{R}$-алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ не изоморфна матричной алгебре $\mathsf{Mat}_2(\mathbb{R})$;
(б) однако их комплексификации $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}$ и $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathsf{Mat}_2(\mathbb{R})$ изоморфны матричной алгебре $\mathsf{Mat}_2(\mathbb{C})$, а значит изоморфны друг другу.

Задача 9.4. Обозначим канонический изоморфизм $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$ за F. Докажите, что для тензора $A \in V^* \otimes W$ ранг линейного оператора $F(A) \in \mathrm{Hom}(V, W)$
(а) равен 1 тогда и только тогда, когда тензор A разложим, то есть представляется в виде $\xi \otimes v$ для подходящих $\xi \in V^*$ и $v \in W$;
(б) не превосходит k если и только если тензор A представляется в виде суммы не более чем k разложимых тензоров.

Задача 9.5. Рассмотрим каноническое отождествление для конечномерного векторного пространства V ($\dim V = n$):

$$\mathrm{Hom}(V, V) \simeq V^* \otimes V \simeq V \otimes V^* \simeq (V^*)^* \otimes V^* \simeq (V^* \otimes V)^* \simeq (\mathrm{Hom}(V, V))^*.$$

Покажите, что связанная с этим отождествлением билинейная форма на пространстве матриц $\mathsf{Mat}_n(\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}(V, V)$ симметрическая и вычислите её в терминах матриц и операторов.

Задача 9.6. Пусть $\dim V = n$. Найдите размерность пространства таких трилинейных форм $\varphi : V \times V \times V \to \Bbbk$, что $\forall\, u, v, w \in V$
(а) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, v)$;
(б) $\varphi(u, u, u) = 0$;
(в) $\varphi(u, u, v) = \varphi(u, v, v)$;
(г) $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$.