

Семинар 11. Представления конечных групп: знакомство

Задача 11.1. Найдите все представления группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

- (а) одномерные над \mathbb{C}, \mathbb{R}
- (б) одномерные над \mathbb{F}_q
- (в) неприводимые над \mathbb{C}, \mathbb{R}
- (г)* неприводимые над \mathbb{F}_q

Задача 11.2. Пусть V – стандартное двумерное (комплексное) неприводимое представление S_3 (симметриями треугольника). Выберите действие транспозиции (12) и 3-цикла (123) в каком-нибудь базисе в пространствах всех $V^{\otimes 2}$, симметричных S^2V и кососимметричных Λ^2V тензоров и разложите соответствующие представления в суммы неприводимых.

Задача 11.3. Пусть G – конечная группа. Докажите, что

- (а) любое неприводимое представление G конечномерно;
- (б) если G – абелева, то неприводимое комплексное представление одномерно,
- (в) если (V, ρ) – одномерное представление, то во-первых, оно неприводимо, во-вторых, $\rho(g) = Id_V$ для всех g , принадлежащих коммутанту G' группы G .

Задача 11.4. Постройте действие группы автоморфизмов группы G (обозначаемой $Aut(G)$) на множестве неприводимых представлений группы G (обозначенном $Irrep_{\mathbb{k}}(G)$). Покажите, что подгруппа внутренних автоморфизмов $Int(G)$ действует тривиально и тем самым имеется действие группы внешних автоморфизмов $Out(G) := Aut(G)/Int(G)$ на множестве $Irrep_{\mathbb{k}}(G)$.

Задача 11.5. Вспомните, заданная группа диэдра D_n симметрий n -угольника образующими и соотношениями, её центр и коммутант и решите следующие вопросы по теории представлений:

- (а) Опишите одномерные представления группы D_n .
- (б) Выпишите отображение $\rho : D_n \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ на образующих для тавтологического 2-мерного (вещественного) представления, заданного действием симметриями n -угольника с центром в $0 \in \mathbb{R}^2$. Покажите, что данное представление неприводимо над \mathbb{R} (и даже над \mathbb{C}).
- (в) Покажите, что группа $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ действует автоморфизмами на группе диэдра D_n , и постройте ещё $\varphi(n)$ двумерных (неприводимых) представлений. Какие из них изоморфны?
- (г)* Рассмотрите отображения $D_n \rightarrow D_m$ для $m|n$ и опишите все неприводимые двумерные комплексные представления группы D_n с точностью до изоморфизма. Сколько их?