11.1 Лемма Шура и числа сплетения

Задача 11.1. Пусть V и W – представления группы G. Введём структуру представления группы G на пространстве $\Bbbk$-линейных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(V,W)$ посредством канонического изоморфизма $\mathrm{Hom}(V,W) \simeq V^* \otimes W$.

(а) Выразите действие G явно.

(б) Докажите, что пространство $\mathrm{Hom}(V,W)^G$ неподвижных точек совпадает с пространством морфизмов $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ представлений V и W.

(в) Воспользовавшись леммой Шура, докажите, что над произвольным полем $\Bbbk$ пространство $\mathrm{Hom}_G(V,V)$ является алгеброй с делением над $\Bbbk$, если V – неприводимо.

(г)* Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk$ не делит порядок G, то есть выполнена теорема Машке. Докажите, что кратность неприводимого представления V в регулярном представлении равна $\dfrac{\dim V}{\dim \mathrm{End}_G(V,V)}$ и докажите тождество $|G| = \sum \dfrac{(\dim V)^2}{\dim \mathrm{End}_G(V,V)}$.

Задача 11.2. Напомним, что группа G действует на множестве X дважды транзитивно, если она переводит любую упорядоченную пару различных элементов в любую другую упорядоченную пару.

(а) Вычислите число сплетение $c_G(\mathbb{C}X, \mathbb{C}X)$ для дважды транзитивного действия и покажите, что подпредставление $\mathbb{C}X$, образованное векторами, сумма координат которых равна нулю, неприводимо.

(б) Покажите, что перестановка базисных векторов в векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ задает квазирегулярное представление группы перестановок, а его подпредставление $\mathbb{C}^{n-1}$ с нулевой суммой координат является неприводимым как для группы перестановок, так и для знакопеременной группы A_n (для $n > 3$). Данное представление называется симплициальным.

Задача 11.3. Напомним, что группой Гейзенберга $Heis_p$ называется группа порядка p^3 заданная 3-мя образующими x, y, z и соотношениями:

$$x^p = y^p = k^p = e,\ xy = kyx,\ xk = kx,\ yk = ky$$

(а) Покажите, что центральный элемент k действует в любом неприводимом комплексном представлении константой.

(б) Покажите, что если (V_ξ, ρ) – неприводимое представление, в котором $\rho(k) = \xi Id_V$ для некоторого примитивного корня p-ой степени из единицы ξ, а $v \in V_\xi$ собственный вектор оператора $\rho(x)$, то векторы $\{\rho(y)^k v | k = 0, \ldots, p-1\}$ образуют базис в пространстве V_ξ и опишите матрицы $\rho(x), \rho(y), \rho(k)$ в этом представлении.

(в) Покажите, что для простого p все неприводимые представления $Heis_p$ одномерны или p-мерны и опишите их.

Задача 11.4. Группа $Aff_1(\mathbb{F}_q)$ состоит из аффинных преобразований прямой $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$, то есть из преобразований вида $z \mapsto az + b$, $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b \in \mathbb{F}_q$, где z– координата на $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$.

(а) Вычислите порядок группы $Aff_1(\mathbb{F}_q)$, её коммутант и множество её одномерных комплексных представлений.

(б) Обозначим за $\mathbb{C}[\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}]$ – пространство комплекснозначных функций на аффинной прямой $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$. Вычислите число сплетение с собой и разложите на неприводимые данное (квазирегулярное) представление $\mathbb{C}[\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}]$.

(в) Выпишите полный список $Irrep(Aff_1(\mathbb{F}_q))$ неприводимых комплексных представлений.