

## Листок 1.

Дифференцируемая функция  $F$  на интервале  $(a, b)$  называется первообразной или неопределенным интегралом функции  $f$ , если  $F' = f$ . Далее обозначаем  $F = \int f(x) dx$ . Ясно, что функция  $F$  определена с точностью до добавления константы.

Задача 1. Раскладывая на простейшие дроби укажите алгоритм интегрирования произвольной рациональной функции. Найдите  $\int \frac{1}{1+x^4} dx$ .

Задача 2. При каких значениях параметров  $a, b, c$  интеграл

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

является рациональной функцией?

Пусть  $g(x, y)$  – неприводимый многочлен. Кривая, заданная уравнением  $g(x, y) = 0$ , называется рациональной, если существует пара рациональных функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  такая, что  $g(x(t), y(t)) = 0$  для всех  $t$  кроме конечного числа и для всех точек кривой  $(x_0, y_0)$  кроме конечного числа существует  $t_0$ , для которого  $x(t_0) = x_0$  и  $y(t_0) = y_0$ .

Задача 3. Найдите рациональную параметризацию кривых

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x^3 + y^3 - xy = 0, \quad x^3 + y^3 - x^2 = 0.$$

Объясните как найти первообразные

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{1+x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt[3]{x^2-x^3}) dx,$$

где  $R$  – произвольная рациональная функция.

Задача 4. Покажите, что всякая кривая, заданная уравнением  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ , является рациональной.

Задача 5. Докажите, что кривая  $x^n + y^n = 1$  при  $n \geq 3$  не является рациональной.

Задача 6. Найдите  $\int \frac{\sin x}{\cos x + 3 \sin x} dx$ ,  $\int x^n e^x dx$ ,  $\int \sin^n x dx$ ,  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ .

Задача 7. Найдите все такие непрерывные функции  $F$ , что  $F$  дифференцируема всюду кроме не более чем счетного множества точек и  $F' = f$ , где

$$(a) f(x) = (-1)^{[x]}, \quad (b) f(x) = \frac{1}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}, \quad (c) f(x) = \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}, \quad x \in (0, \pi/2).$$

Задача 8. Пусть  $G = \int g(y) dy$  и  $F = \int f(x) dx$  на  $(a, b)$ . Докажите, что дифференцируемая функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению  $g(y)y' = f(x)$  на интервале  $(a, b)$  тогда и только тогда, когда верно равенство  $G(y(x)) = F(x) + C$  для всех  $x \in (a, b)$  и некоторого  $C$ . Решите уравнение  $y' = \lambda y$ .

Задача 9. (Остывание чайника) Исходя из того, что скорость остывания чайника пропорциональна разности его температуры и температуры воздуха, выведите зависимость температуры чайника от времени и оцените время его остывания до комнатной температуры.

Задача 10. (Водяные часы) Известно, что скорость истечения воды из небольшого отверстия на дне сосуда достаточно точно может быть вычислена по формуле  $0,6\sqrt{2gH}$ , где  $g$  – ускорение силы тяжести, а  $H$  – высота уровня воды над отверстием. Какую форму должен иметь сосуд, являющийся телом вращения, чтобы при стечении из него воды уровень воды понижался равномерно?

**Теорема Лиувилля** Пусть  $f$  и  $g$  рациональные функции, причем функция  $f$  не является тождественным нулем, а функция  $g$  не является константой. Интеграл

$$\int f(z)e^{g(z)} dz$$

является элементарной функцией (это означает, что функция принадлежит полю, полученному последовательным присоединением к полю рациональных функций конечного набора алгебраических элементов или элементов, которые являются экспонентами или логарифмами элементов, полученных на предыдущих шагах расширения исходного поля) тогда и только тогда, когда существует такая рациональная функция  $a$ , для которой имеет место равенство  $f = a' + ag'$ .

Задача 11. Проверьте, что интеграл от  $e^{z^2}$  не является элементарной функцией.

Задача 12. Проверьте, что интеграл от  $e^z/z$  не является элементарной функцией.