Листок 2.

Число $I = \int_a^b f(x)\,dx$ называется интегралом Римана от функции f по $[a,b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ с масштабом $\lambda(T) = \max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$ и всяких отмеченных точек $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ верно неравенство $|I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)|\Delta_i|| < \varepsilon$. Здесь $|\Delta_i| = |x_i - x_{i-1}|$. Кратко это определение записываем так $I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)|\Delta_i|$.

Далее используем обозначение χ_E для индикатора множества E.

Задача 1. (a) Докажите, что интегрируемая по Риману функция ограничена.

(b) Докажите, что функция Дирихле $\chi_{\mathbb{Q}}$ на $[a,b]$ не интегрируема по Риману.

(c) Докажите, что функция χ_S, где S – отрезок, интервал или полуинтервал, интегрируема по Риману на $[a,b]$.

Задача 2. Докажите, что интеграл Римана $I(f)$ функции f по отрезку $[a,b]$ является линейным и монотонным по f: $I(\lambda f) = \lambda I(f), \quad I(f+g) = I(f) + I(g), \quad f \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0$.

Задача 3. (a) Докажите, что если функции f_n интегрируемы по Риману на $[a,b]$ и последовательность f_n равномерно сходится к f на $[a,b]$, то f интегрируема на $[a,b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Покажите на примере, что равномерную сходимость нельзя заменить поточечной.

(b) Докажите, что непрерывные функции интегрируемы по Риману.

(c) Докажите, что функция, имеющая конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема по Риману.

(d) Приведите пример интегрируемой по Риману функции, которая не является равномерным пределом простых функций, т.е функций вида $\sum_{j=1}^m c_j \chi_{\Delta_j}$, где Δ_j – ограниченные промежутки, т.е. точки, отрезки, интервалы или полуинтервалы.

Задача 4. Пусть f – непрерывная на $[a,b]$ функция.

(a) Докажите, что для всякого $c \in [a,b]$ верно равенство $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

(b) Докажите, что найдется $c \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

(c) Докажите, что $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

Покажите, что если функция F непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, то имеет место формула Ньютона–Лейбница $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Приведите пример дифференцируемой функции, у которой производная не является интегрируемой по Риману функцией.

(d) Пусть f, g – непрерывно дифференцируемые функции. Выведите формулу интегрирования по частям: $\int_a^b fg'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b gf'\,dx$.

(e) Пусть f – непрерывная функция, а φ – непрерывно дифференцируемая функция. Выведите формулу замены переменных: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Задача 5. Найдите:

(a) $\int_{1/10}^{10} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$,

(b) $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$, где f – непрерывна на $[0,1]$ и $f > 0$,

(c) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$, где f – непрерывна на $[-1,1]$ и $pf(x) + qf(-x) = 1$, $p + q \neq 0$.

Задача 6. Пусть $f > 0$ – непрерывная функция. Найдите $\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 f^p\,dx\right)^{1/p}$.

Задача 7. Пусть ψ – непрерывно дифференцируемая выпуклая функция на $\mathbb{R}$, f – непрерывная функция и $f \geq 0$. Докажите неравенство Йенсена:

$$\psi\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big) \leq \int_0^1 \psi(f(x))\,dx.$$

Задача 8. Пусть $p, q > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Докажите неравенства Гёльдера и Минковского:
$$\int_a^b |f||g|\,dx \le \Big(\int_a^b |f|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b |g|^q\,dx\Big)^{1/q}, \Big(\int_a^b |f+g|^p\,dx\Big)^{1/p} \le \Big(\int_a^b |f|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |g|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Задача 9. Пусть $f : [1; +\infty) \to (0; +\infty)$ — монотонно убывающая непрерывная функция. Докажите, что ряд $\sum_n f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{M\to\infty} \displaystyle\int_1^M f(x)dx$. Исследуйте сходимость ряда $\sum_n \frac{1}{n^p \ln^q n}$.

Если существует предел $\lim_{M\to\infty} \displaystyle\int_a^M f(x)dx$, то говорят, что f интегрируема на $[a, +\infty)$ в несобственном смысле и значение предела обозначают через $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Задача 10.(Эйлер) Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема на $[1, +\infty)$. Тогда верно равенство
$$\sum_{n=M}^N f(n) = f(M) + \int_M^N f(x)\,dx + \int_M^N \{x\} f'(x)\,dx,$$
где $\{x\}$ – дробная часть числа x.

Задача 11. Используя формулу из задачи 10 обоснуйте сходимость ряда $\sum_n \frac{\cos\sqrt{n}}{n}$.

Задача 12. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$, причем $|f|^2$ и $|f''|^2$ интегрируемы на $[0, +\infty)$. Докажите, что $|f|^2$ интегрируема на $[0, +\infty)$ и