НМУ, I курс, 06.04.2020

Листок 4.

Задача 1. Приведите пример функции f двух переменных, у которой $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Задача 2. (Теорема Юнга) Докажите, что если отображения $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ дифференцируемы в точке (a,b), частные производные второго порядка по x и y и по y и x в точке (a,b) совпадают.

Функция $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ является m – раз дифференцируемой функцией в точке a, если все ее частные производные $m-1$ порядка дифференцируемы в точке a. Положим

$$d^m f(a,h) = \sum_{i_1,\dots,i_m} \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} h_{i_1} \cdots h_{i_m}, \quad h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Задача 3. Докажите, что $d^m f(h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f$. Найдите $d^m f$ от функции $e^{ax+by+cz}$.

Задача 4. Пусть $g\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – дважды дифференцируемое отображение (т. е. $g = (g_1,\dots,g_m)$ и g_i – дважды дифференцируемые функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$). Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая функция. Найдите $d^2(f \circ g)$. Запишите при $n=3$ оператор Лапласа $\Delta f = f_{x_1 x_1} + \ldots + f_{x_n x_n}$ в сферической системе координат.

Задача 5. Пусть F_0 и F_1 — два произвольных непересекающихся замкнутых множества в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует бесконечно гладкая функция, принимающая значение 0 на множестве F_0, значение 1 на множестве F_1, и значения строго между 0 и 1 в остальных точках $\mathbb{R}^n$.

Задача 6. (Необходимое условие локального экстремума) Пусть N – нормированное пространство. Предположим, что f определена в некоторой окрестности $U \subset N$ точки a и $f(x) \geq f(a)$ для всех $x \in U$ ($f(x) \leq f(a)$ для всех $x \in U$). Если f дифференцируема в точке a, то $df(a,\cdot) = 0$.

Задача 7. (i) Пусть $F(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$ – отображение $C^1([0,1])$ в $\mathbb{R}$. Функция $L(t,x,p)$ всюду дважды непрерывно дифференцируема. Найдите дифференциал отображения F.

(ii) В условиях предыдущего пункта предположим, что для некоторой функции $x \in C^2([0,1])$ выполняется неравенство $F(x) \leq F(x+h)$ для всех $h \in C^1([0,1])$ таких, что $h(0) = h(1) = 0$. Покажите, что $dF(x,h) = 0$ при $h \in C^1([0,1])$, $h(0) = h(1) = 0$. Докажите, что для функции x выполняются уравнения Эйлера-Лагранжа: $\frac{d}{dt} L_p(t,x(t),\dot{x}(t)) + L_x(t,x(t),\dot{x}(t)) = 0, \quad L_p = \frac{\partial L}{\partial p}, L_x = \frac{\partial L}{\partial p}$.

Задача 8.

(i) Пусть $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\dot{x}(t))^2}{2} - U(x(t))\, dt$, где U – непрерывно дифференцируемая функция. Пусть $x \in C^2([0,1])$ и $F(x) \leq F(y)$ для всех y таких, что $y(0) = x(0)$ и $y(1) = x(1)$. Докажите, что $\ddot{x} = -U'(x)$.

(ii) Пусть частица без трения под действием силы тяжести двигается по кривой, задаваемой графиком функции $x = x(t)$, причем $x(0) = 1$ и $x(1) = 0$. Какой формы должна быть кривая, чтобы время спуска было минимальным?

Указание: $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (\dot{x}(t))^2}{t}}\, dt$.

Задача 9. Исследуйте на экстремум функцию $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Задача 10. Найдите все критические точки (точки, в которых $\mathrm{gradf} = 0$) функции $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ и классифицируйте их.

Будем говорит, что функция f на $\mathbb{R}^n$ выпукла, если $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ для всех x, y и всех $\alpha \in [0,1]$.

Задача 11. (i) Пусть f – дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству $\langle \mathrm{grad} f(x) - \mathrm{grad} f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. (ii) Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству $d^2 f(h) \geq 0$.

Задача 12.(Метод градиентного спуска) Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема и $m\|h\|^2 \leq d^2 f(h) \leq M\|h\|^2$, где $m, M > 0$. Пусть $x_{n+1} = x_n - \gamma \cdot \mathrm{grad} f(x_n)$, где $0 < \gamma < 2/M$. Докажите, что последовательность x_n сходится к точке минимума функции f. Проиллюстрируйте этот метод на примере функции $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.