Листок 5.

Задача 1. Пусть $\mathcal{A}$ состоит из множеств, которые являются объединением конечного числа дизъюнктных полуинтервалов $[a, b) \in [0, 1)$. Докажите, что $\mathcal{A}$ является алгеброй, но не является сигма-алгеброй.

Задача 2. Пусть S – некоторый класс множеств в X. Пусть A_1 – пустое множество, множества из набора S и их дополнения. Через A_2 обозначим набор всех конечных пересечений множеств из A_1. Докажите, что набор A_3, состоящий из всех конечных объединений множеств из A_2, совпадает с алгеброй, порожденной набором S.

Задача 3. Пусть $\mathcal{A}$ – сигма-алгебра и множество $S \notin \mathcal{A}$. Докажите, что

$$\sigma(\{\mathcal{A}, S\}) = \Big\{(A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S))\colon A, B \in \mathcal{A}\Big\}.$$

Задача 4. Докажите, что всякое множество $A \subset \sigma(S)$ принадлежит $\sigma(\{S_n\})$ для некоторого не более чем счетного набора множеств S_n из S.

Задача 5. Докажите, что борелевская сигма-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ совпадает с сигма-алгеброй порожденной (a) всеми интервалами с рациональными концами, (b) всеми замкнутыми лучами, (c) всеми отрезками.

Задача 6. Докажите, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ – сигма-алгебра, порожденная всеми измеримыми прямоугольниками $B_1 \times B_2$, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Задача 7. Пусть $f\colon X \to Y$ и на множестве X задана сигма-алгебра $\mathcal{A}_X$, а на множестве Y задана сигма-алгебра $\mathcal{A}_Y$. Докажите, что (a) $\{f^{-1}(B)\colon B \in \mathcal{A}_y\}$ является сигма-алгеброй, (b) $\{B\colon f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_x\}$ является сигма-алгеброй, (c) $f^{-1}(\sigma(S)) = \sigma(f^{-1}(S))$.

Задача 8. Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – борелевская функция и $f_1, \ldots, f_n$ – $(X, \mathcal{A})$ – измеримые функции. Докажите, что $F(f_1, \ldots, f_n)$ – $(X, \mathcal{A})$ – измеримая функция. Выведите из этого, что сумма и произведение измеримых функций является измеримой функцией.

Задача 9. Пусть f_n – последовательность $(X, \mathcal{A})$ – измеримых функций. Докажите, что множество x таких, что существует предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ является измеримым. Докажите, что если предел существует всюду, то предельная функция является измеримой.

Задача 10. Пусть f_n – последовательность $(X, \mathcal{A})$ – измеримых функций. Докажите, что функции $\sup_n f_n(x)$ и $\inf_n f_n(x)$ измеримы. Приведите пример, что для несчетного набора функций это утверждение неверно.

Задача 11.

(a) Пусть $f\colon \mathbb{R}\times Y \to \mathbb{R}$ и при каждом y функция $x \to f(x, y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а при каждом x функция $y \to f(x, y)$ измерима относительно сигма алгебры $\mathcal{A}$ на Y. Докажите, что f измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$.

(b) Пусть $f(x, y)$ при каждом y интегрируема по Риману на $[a, b]$ по x, и при каждом x эта функция является $(Y, \mathcal{B})$ – измеримой по y. Докажите, что

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

является измеримой функцией на $(Y, \mathcal{B})$.

Задача 12. Пусть f измерима относительно сигма-алгебры, порожденной функцией g (т.е. относительно $g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$). Докажите, что $f = F(g)$ для некоторой борелевской функции F.