НМУ, I курс, 27.04.2020

Листок 6.

Задача 1. На алгебре подмножеств $\mathbb{N}$, каждое из которых либо конечно либо является дополнением к конечному, задана мера μ: если A – конечное множество, то $\mu(A) = 0$, а если A – дополнение к конечному, то $\mu(A) = 1$. Проверьте, что μ является аддитивной, но не сигма-аддитивной мерой.

Задача 2. На алгебре, состоящей из конечных объединений попарно непересекающихся полуинтервалов $[a, b)$ в $\mathbb{R}$ задана мера μ формулой $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$, где F – монотонная ограниченная и непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что существует компактный класс, приближающий меру μ.

Задача 3. Пусть μ – сигма-аддитивная конечная неотрицательная мера на алгебре $\mathcal{A}$. Докажите, что следующие утверждения равносильны: (i) A – μ измеримо, (ii) существуют $B, C \in \sigma(\mathcal{A})$, $B \subset A \subset C$ и $\mu(B \setminus C) = 0$, (iii) $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X)$.

Задача 4. (a) Пусть μ – сигма-аддитивная конечная неотрицательная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество U и замкнутое множество F такие, что $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$ и $F \subset B \subset U$.

(b) Докажите, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда оно является объединением борелевского множества и множества меры нуль по Лебегу.

(c) Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – измеримо по Лебегу. Докажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество U и замкнутое множество F такие, что $\lambda(U \setminus F) < \varepsilon$ и $F \subset E \subset U$.

Задача 5. (a) Докажите, что если $L(x) = b + Cx$, то $\lambda(C(A)) = |\mathrm{det} C| \lambda(A)$.

(b) Пусть μ – вероятностная борелевская мера на единичном кубе. Предположим, что для любых двух множеств B_1 и B_2, отличающихся сдвигом, верно равенство $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Докажите, что μ – мера Лебега.

Задача 6. Докажите, что на прямой есть такое борелевское множество B, что для всякого интервала I множества $B \cap I$ и $(\mathbb{R} \setminus B) \cap I$ имеют положительную меру Лебега.

Задача 7. Пусть A – множество положительной меры Лебега на числовой прямой. Докажите, что множество $A - A$ содержит интервал.

Задача 8. Пусть μ – конечная неотрицательная мера на сигма-алгебре $\mathcal{A}$, $A_n \in \mathcal{A}$ и f_n – последовательность $\mathcal{A}$ измеримых функций.

(a) Известно, что ряд $\sum_n \mu(A_n)$ сходится. Докажите, что $\mu\Big(\bigcap_N \bigcup_{n>N} A_n\Big) = 0$.

(b) Докажите, что если ряд $\sum_n \mu\Big(x\colon |f_n(x)| \geq \delta\Big)$ сходится для всякого $\delta > 0$, то последовательность f_n сходится μ почти всюду к нулю.

Задача 9. (a) Приведите пример последовательности измеримых по Лебегу функций на $[0, 1]$, которые сходятся по мере Лебега к нулю, но не сходятся ни в одной точке.

(b) Докажите, что во всякой сходящейся по мере последовательности есть сходящаяся почти всюду подпоследовательность.

(c) Докажите, что $\sin nx$ не имеет сходящейся по мере подпоследовательности на $[0, 1]$.

(d) Докажите, что сходимость почти всюду не задается топологией.

Задача 10. Пусть μ – конечная неотрицательная мера. Докажите, что если f_n сходится к f по мере μ, то $\Psi(f_n)$ сходится к $\Psi(f)$ по мере μ для всякой непрерывной функции Ψ.

Задача 11. (a) Приведите пример измеримой по Лебегу функции f на $[0, 1]$ такой, что всякая измеримая функция g, совпадающая почти всюду с f, всюду разрывна.

(b) Докажите, что для всякой измеримой по Лебегу функции f на $\mathbb{R}^n$ существует борелевская функция g такая, что $f = g$ почти всюду.

Задача 12. Докажите, что если f – локально липшицево отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то образ измеримого по Лебегу множества является измеримым по Лебегу. Приведите пример, показывающий, что для непрерывного отображения это неверно.