Лекция 11
22.04.20

John Horton Conway
(26.12.1937 – 11.04.2020)

Фризы Конвея – Кокстера

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix} \qquad ad - bc = 1. \qquad \boxed{c = \frac{ad-1}{b}.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

1 1 1 1 1 1 1 1 1
… 2 1 4 2 1 3 2 2 1 …
3 1 3 7 1 2 5 3 1
1 2 5 3 1 3 7 1 2
2 1 3 2 2 1 4 2 1 3
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Свойства фризов:

- Целочисленность: $c = \frac{ad-1}{b}$ всегда целое.
- Скользящая симметрия строк
- Как связано число строк с периодом фриза?
- Когда фриз замыкается? Сколько строк?

$$\begin{array}{l} \ldots\ 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1 \\ \quad\ldots\ 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\quad 2\ \ldots \\ \quad 3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3 \\ \qquad 4\quad 4\quad 4\quad 4\quad 4\quad 4 \end{array}$$

$$n^2-(n-1)(n+1)=1$$

$$\begin{array}{l} 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1 \\ \quad a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4\quad a_5 \\ \qquad V_2(a_1,a_2)\quad V_2(a_2,a_3)\ \ldots \\ \qquad\quad V_3(a_1,a_2,a_3). \end{array}$$

$$V_0(\cdot) = 1.$$

$$V_2(a_1,a_2) = a_1a_2 - 1 \qquad V_1(a) = a$$

$$V_3(a_1,a_2,a_3) = \frac{1}{a_2}\Big(V_2(a_1,a_2)\cdot V_2(a_2,a_3) - 1\Big) =$$

$$= \frac{1}{a_2}\big((a_1a_2-1)(a_2a_3-1)-1\big) = \frac{1}{a_2}\big(a_1a_2^2a_3 - a_1a_2 - a_2a_3 + 1 - 1\big) =$$

$$= a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3.$$

$$V_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_1 a_4 - a_3 a_4 + 1.$$

Континуанты.

$$V_n(a_1, \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & & \\ & 1 & a_3 & 1 & \\ & & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

$$V_2(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - 1$$

$$V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Теорема</u>: элемент $(n+1)$-й строки фриза, стоящий под $a_1, \dots, a_n$, равен континуанте $V_n(a_1, \dots a_n)$.

Д-во: Инд. по номеру строки:

$n = 1$ и 2 - очевидно.

Нужно проверить: что если

$$V_n(a_1 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & a_n \end{vmatrix}, \text{ то}$$

они удовл. соотн "$ad - bc = 1$":

$$V_n(a_1 \ldots a_n) \cdot V_{n-2}(a_2, \ldots a_{n-1}) -$$

$$- V_{n-1}(a_1 \ldots a_{n-1}) \cdot V_{n-1}(a_2, \ldots a_n) = -1.$$

Применим теор о конденсации к V_n:

$$M = V_n(a_1 \ldots a_n)$$

$$M^{1n}_{1n} = V_{n-2}(a_2, \ldots a_{n-1})$$

$$M^1_1 = V_{n-1}(a_2, \ldots a_n)$$

$$M^n_n = V_{n-1}(a_1 \ldots a_{n-1}).$$

$$M^n_1 = M^1_n = 1.$$

$$M \cdot M_{1n}^{1n} = M_1^1 M_n^n - M_1^n M_n^1 .$$

$$\begin{array}{ccc} & V_{n-2} & \\ V_{n-1} & & V_{n-1} \\ & V_n & \end{array} \qquad \begin{vmatrix} V_{n-1} & V_{n-2} \\ V_n & V_{n-1} \end{vmatrix} = 1 .$$

<u>Следствие</u>: элементы фриза – целые числа (в случае, когда $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.)

Разложим $V_n(a_1 \ldots a_n)$ по строке:

$$V_n(a_1 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix} = a_n \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & \ddots & 0 \\ & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_n V_{n-1}(a_1 \ldots a_{n-1}) - V_{n-2}(a_1, \ldots a_{n-2}).$$

<u>Предл.</u> $V_n(a_1 \ldots a_n) =$

$$= a_n V_{n-1}(a_1 \ldots a_{n-1}) - V_{n-2}(a_1, \ldots a_{n-2}).$$

Пусть фриз оказался **конечным**.

Пусть он состоит из $n-1$ строк, вкл. первую и последнюю. Такой фриз назовём **фризом порядка n**.

Лемма. Вторая строка кон. фриза сод. 1.

Д-во. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — эл-ты второй строки.

$V_1 = a_1$

$V_2 = V_2(a_1, a_2)$

$V_3 = V_3(a_1, a_2, a_3)$

$- \; - \; - \; -$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots & \\ & & v_2 & & & & & & & & \\ & & & V_3 & \dots & & & & & & \\ & & & & & V_{n-2} = 1 & & & & & \\ & & & & & & V_{n-1} = 0 & & & & \end{array}$$

Предп. противное: все $a_i \geq 2$.

Док., что тогда посл-ть $V_i \nearrow$.

$$V_k = a_k V_{k-1} - V_{k-2} \geq 2 V_{k-1} - V_{k-2}$$

$$V_k - V_{k-1} \geq V_{k-1} - V_{k-2} \geq V_{k-2} - V_{k-3} \geq \dots \geq V_1 - V_0 \geq 1.$$

Противоречие с $V_{n-1} = 0$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \\ & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots & & a_{n-1} \\ & & v_2 & & & & & & & & & \\ & & & V_3 & \dots & & & & & & & \\ & & & & & V_{n-3} & / & W_{n-3} = a_n & & & & \\ & & & & & V_{n-2} = 1 & & & & & & \\ & & & & & & V_{n-1} = 0 & & & & & \end{array}$$

$V_{n-1} = 0$

$V_{n-2} = 1$

$$0 = V_{n-1} = a_{n-1} \cdot \underbrace{V_{n-2}}_{= 1} - V_{n-3}$$

$$V_{n-3} = a_{n-1}.$$

Предл. Предпоследняя строка совп. со второй, сдвинутой на $n/2$ позиций.

Следствие: Фриз порядка n обл. скользящей симм: он совп. со своим отраж. относительно гориз. оси, сдвинутым на $n/2$ позиций.

Следствие Фриз порядка n периодичен с периодом n.

Обозн.: назовём вторую строку $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ *сущностью* фриза порядка n.
(quiddity)

Вопрос: какими бывают сущности фризов конечного порядка?

Лемма. Пусть $(a_1 \ldots a_n)$ - сущность фриза порядка n. Тогда

$$(a_1, \ldots a_{k-1}+1,\ 1,\ a_k+1,\ a_{k+1}, \ldots a_n) -$$

– сущность фриза порядка $n+1$.

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad - - \quad a_n$

V_2

$V_3 \ldots V_{n-1}$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \ldots$

$a_1 \quad a_2 \quad a_{k-1}+1 \quad 1 \quad a_k+1$

W_2

$W_3 \ldots$

$W_i = V_i \qquad i \le k-2.$

$W_{k-1} = (a_{k-1}+1)W_{k-2} - W_{k-3} = (a_{k-1}+1)V_{k-2} - V_{k-3} =$

$= a_{k-1}V_{k-2} - V_{k-3} + V_{k-2} =$

$= V_{k-1} + V_{k-2}.$

$W_k = W_{k-1} - W_{k-2} = V_{k-1}.$

$W_{k+1} = (a_k+1)W_k - W_{k-1} = a_k V_{k-1} + V_{k-1} -$

$-(V_{k-1} + V_{k-2}) = a_k V_{k-1} - V_{k-2} = V_k.$

$W_{k+2} = V_{k+1}$

$\dots$

Эта операция обратима:

если $(\dots b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$ —

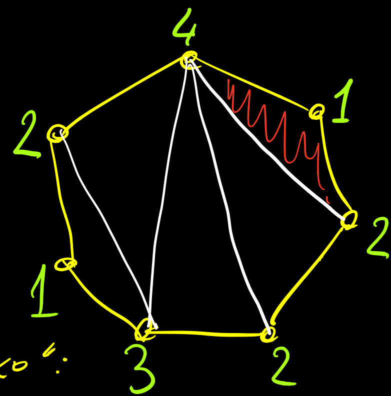
сущность целочисл. фриза,

то и

$(\dots, b_{k-1}-1, b_{k+1}+1, \dots)$ —

тоже сущность целочисл. фриза.

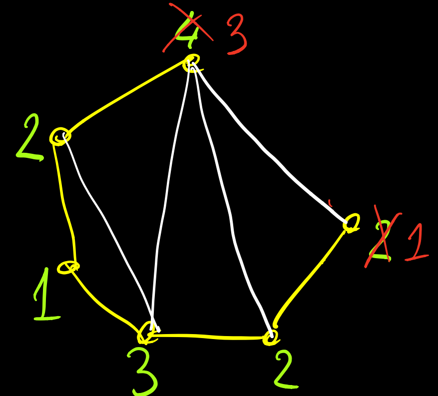
Рассм. триангуляцию n-угольника



Сущность триангуляции: посл-ть количеств $\triangle$ при вершинах.

Если отрезать n-угольнику "ухо":

$$(\dots b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$$
$$\downarrow$$
$$(\dots b_{k-1}-1, b_{k+1}-1, \dots)$$

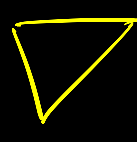


Теорема (H.S.M. Coxeter, J.H. Conway '73).

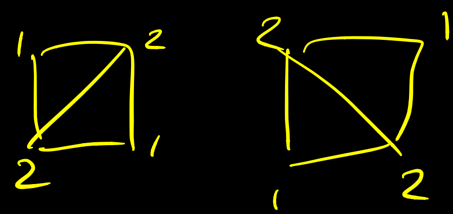
Сущ. биекция между целочисл. фризами порядка n и триангуляциями n-угольника.

Д-во. Инд. по n. Фриз пор. $n=3$:

$$\begin{matrix} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{matrix}$$



$n = 4$



$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & 2 & & 1 & & 2 & & 1 & . \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Фризу сопоставим триангуляцию с той же сущностью.

Операции над фризом "вставка диагонали" отвечает операция над триангуляцией "приклеивание уха".