Листок 1. Торсоры

Пусть K является произвольным полем.

Упражнение 1.1. Торсоры над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Опишите явно все $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-торсоры над K. (Указание: воспользуйтесь тем, что для любого торсора T алгебры $\mathcal{O}(T)$ и $\mathcal{O}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ становятся изоморфными над алгебраическим замыканием поля K, и найдите все возможные варианты для алгебры $\mathcal{O}(T)$.)

Упражнение 1.2. Первые когомологии

Пусть группа G действует автоморфизмами на группе Γ: элемент $g \in G$ переводит $\gamma \in \Gamma$ в ${}^g\gamma$. Множество 1-коциклов определяется следующим образом:

$$Z^1(G,\Gamma) = \left\{\varphi\colon G \to \Gamma \;\middle|\; \forall g,h \in G:\ \varphi(gh) = \varphi(g)\cdot {}^g\varphi(h)\right\}.$$

(i) Докажите, что формула

$$({}^\gamma\varphi)(g) = \gamma\cdot\varphi(g)\cdot {}^g(\gamma^{-1}), \quad \gamma\in\Gamma, g\in G,$$

определяет действие группы Γ на множестве $Z^1(G,\Gamma)$. Положим

$$H^0(G,\Gamma) = \Gamma^G, \quad H^1(G,\Gamma) = Z^1(G,\Gamma)/\Gamma.$$

Заметим, что $H^1(G,\Gamma)$ является множеством с отмеченным элементом, задаваемым отображением $\varphi(g)\equiv e$.

(ii) Покажите, что если группа G действует тождественно на Γ, то множество $H^1(G,\Gamma)$ канонически биективно фактору множества $\mathrm{Hom}(G,\Gamma)$ по действию группы Γ сопряжениями.

(iii) Пусть дана точная тройка групп с действием группы G

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1.$$

Покажите, что формула $(\delta\gamma)(g) = \tilde\gamma^{-1}\cdot {}^g\tilde\gamma$ определяет отображение множеств $\delta\colon H^0(G,\Gamma)\to H^1(G,A)$, где $\gamma\in\Gamma^G\cong H^0(G,\Gamma)$, а $\tilde\gamma\in\widetilde{\Gamma}$ — произвольный прообраз элемента γ. Докажите, что имеется точная последовательность множеств с отмеченным элементом

$$1 \longrightarrow H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G,\widetilde{\Gamma}) \longrightarrow H^0(G,\Gamma) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^1(G,A) \longrightarrow H^1(G,\widetilde{\Gamma}) \longrightarrow H^1(G,\Gamma),$$

то есть в каждом члене образ входящего отображения совпадает с прообразом отмеченного элемента относительно исходящего отображения.

Упражнение 1.3. Торсоры и первые когомологии

Пусть Γ является гладкой алгебраической группой над K, а T является Γ-торсором. Напомним, что торсор T тривиален над K^{sep}, т.е. существует изоморфизм $\lambda\colon T_{K^{sep}} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{K^{sep}}$ торсоров относительно алгебраической группы $\Gamma_{K^{sep}}$ над K^{sep}.

(i) Покажите, что для любого элемента g из абсолютной группы Галуа $G_K = \mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ поля K автоморфизм ${}^g\lambda \circ \lambda^{-1}\colon \Gamma_{K^{sep}} \to \Gamma_{K^{sep}}$ задается правым сдвигом на некоторый элемент $\varphi(g) \in \Gamma(K^{sep})$. Проверьте, что отображение $g \mapsto \varphi(g)$ является 1-коциклом из $Z^1\big(G_K, \Gamma(K^{sep})\big)$.

(ii) Докажите, что корректно определено отображение из множества классов изоморфизма Γ-торсоров над K в множество $H^1\big(G_K, \Gamma(K^{sep})\big)$, сопоставляющее классу Γ-торсора T класс 1-коцикла φ, определенного в пункте (i). Проверьте, что при этом тривиальному торсору соответствует отмеченный элемент.

Упражнение 1.4. Данные спуска, 1-коциклы и формы

(i) Пусть $\mathcal{M}$ является категорией, расслоенной над полями, и пусть $K \subset L$ — конечное расширение полей, являющееся расширением Галуа с группой Галуа G. Для любого объекта X из $\mathcal{M}(K)$ постройте каноническую биекцию между $H^1\big(G, \mathrm{Aut}(X_L)\big)$ и множеством классов изоморфизма данных спуска на X_L, при которой отмеченному элементу соответствуют канонические данные спуска ρ_X на X_L. (Указание: рассмотрите соответствие

$$\rho(g) = \varphi(g) \circ \rho_X(g) \ : \ g_*X_L \longrightarrow X_L$$

между данными спуска ρ и 1-коциклами φ. Также вспомните, что

$${}^g\theta \circ \rho_X(g) = \rho_X(g) \circ g_*\theta \ : \ g_*X_L \longrightarrow X_L$$

для любого автоморфизма $\theta\colon X_L \to X_L$.) В частности, покажите, что любой гомоморфизм $G \to \mathrm{Aut}(X)$ определяет данные спуска на X_L.

(ii) Пусть объект X' из $\mathcal{M}(K)$ является L-формой объекта X, т.е. существует изоморфизм $\lambda\colon X'_L \xrightarrow{\sim} X_L$ в $\mathcal{M}(L)$. Тогда данные спуска $\rho_{X'}$ на X'_L задают данные спуска ρ на X_L посредством изоморфизма λ (возможно, отличные от данных спуска ρ_X). Покажите, что 1-коцикл, соответствующий ρ как в пункте (i), задается по формуле $g \mapsto \lambda \circ {}^g\lambda^{-1}$.

Упражнение 1.5. Первые когомологии Галуа некоторых групп

(i) Покажите, что

$$H^1\big(G_K, \mathrm{SL}_n(K^{sep})\big) = H^1\big(G_K, \mathrm{Aff}_n(K^{sep})\big) = H^1\big(G_K, U(K^{sep})\big) = \{1\}\,,$$

где Aff_n обозначает группу аффинных автоморфизмов n-мерного аффинного пространства, а U является произвольной унипотентной алгебраической группой над K. (Указание: воспользуйтесь точными последовательностями

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_n(K^{sep}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K^{sep}) \longrightarrow (K^{sep})^* \longrightarrow 1\,,$$

$$1 \longrightarrow (K^{sep})^n \longrightarrow \mathrm{Aff}_n(K^{sep}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K^{sep}) \longrightarrow 1\,,$$

$$1 \longrightarrow [U,U](K^{sep}) \longrightarrow U(K^{sep}) \longrightarrow \big(U/[U,U]\big)(K^{sep}) \longrightarrow 1\,,$$

теоремой Гильберта 90, утверждением об ацикличности G_K-модуля K^{sep} и упражнением 1.2(iii).)

(ii) Покажите, что $H^1\big(G_K, \mathrm{Sp}_{2n}(K^{sep})\big) = \{1\}$, где Sp_{2n} обозначает симплектическую группу матриц размера $2n \times 2n$. (Указание: вспомните, как устроены невырожденные кососимметрические формы.)

(iii) Покажите, что если $\mathrm{char}(K) \neq 2$, то имеется каноническая биекция между множеством классов эквивалентности невырожденных квадратичных форм ранга n над K и множеством классов изоморфизма O_n-торсоров над K, где O_n обозначает ортогональную группу. (Указание: оба множества биективны $H^1\big(G_K, \mathrm{O}_n(K^{sep})\big)$.) Как явно сопоставить квадратичной форме O_n-торсор?

(iv) Пусть множество S состоит из комплексных матриц M размера $n \times n$, для которых выполняется равенство $\bar{M} = M^T = M^{-1}$, где $\bar{M}$ обозначает комплексное сопряжение матрицы M, а M^T —

ее транспонирование. Рассмотрим действие группы $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ на S, заданное по формуле $A\colon M \mapsto AM(\bar{A})^{-1}$, $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$, $M \in S$. Сколько элементов в фактормножестве $S/\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$? (Указание: покажите, что имеется биекция $H^1\big(G_{\mathbb{R}}, \mathrm{O}_n(\mathbb{C})\big) \simeq S/\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$. Далее вспомните, как устроены невырожденные квадратичные формы над $\mathbb{R}$.)

Упражнение 1.6. Многообразия Севери–Брауэра

Многообразием Севери–Брауэра над K называется форма проективного пространства, т.е. многообразие X над K, для которого $X_{K^{sep}}$ изоморфно $\mathbb{P}^n_{K^{sep}}$ для некоторого $n \geqslant 0$. Докажите, что многообразие Севери–Брауэра изоморфно проективному пространству над K тогда и только тогда, когда X имеет K-точку. Данное утверждение иногда называют теоремой Севери. (Указание: какова группа автоморфизмов проективного пространства с отмеченной точкой?)

Упражнение 1.7. Коники

(i) Покажите, что имеются канонические биекции между следующими тремя множествами: $H^1\big(G_K, \mathrm{PGL}_2(K^{sep})\big)$, множество классов изоморфизма ассоциативных K-алгебр размерности 4, становящихся изоморфными матричной алгебре $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K^{sep})$ над K^{sep}, множество классов проективной эквивалентности коник, т.е. гладких кривых в $\mathbb{P}^2$ над K степени 2. (Указание: для первой биекции воспользуйтесь тем, что все автоморфизмы матричной алгебры внутренние, т.е. являются сопряжениями с помощью обратимых матриц. Для второй биекции вспомните, чему равна группа автоморфизмов проективной прямой, а также для произвольной кривой C над K рода 0 рассмотрите вложение в $\mathbb{P}^2$, заданное очень обильным антиканоническим пучком ω_C^{-1}.)

(ii) Предположим, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Для элементов $a, b \in K^*$ положим $L = K(\sqrt{a})$ и рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon G_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{PGL}_2(K)\,,$$

где последний гомоморфизм задается элементом $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}_2(K)$. Определим кватернионную алгебру $A(a,b)$, имеющую K-базис $1, i, j, ij$, с умножением, заданным соотношениями $i^2 = a$, $j^2 = b$,

$ij = -ji$. Докажите, что при биекциях из пункта (i) класс гомоморфизма φ соответствует классу алгебры $A(a,b)$ и классу коники, заданной уравнением $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$. (Указание: постройте явно изоморфизмы $A(a,b)_L \simeq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(L)$ и $C_L \simeq \mathbb{P}^1_L$, а затем воспользуйтесь упражнением 1.4(ii).)

(iii) Выведите из пункта (ii), что если $\mathrm{char}(K) \neq 2$, то любая ассоциативная K-алгебра размерности 4, изоморфная матричной алгебре над K^{sep}, является кватернионной алгеброй $A(a,b)$ для некоторых $a, b \in K^*$. (Указание: каким уравнением можно задать произвольную конику над полем характеристики, не равной 2?) Данный факт можно доказать и более явно, чисто алгебраическими методами.

Упражнение 1.8. Торсоры в категориях

Пусть $\mathcal{C}$ является категорией, в которой есть конечные непустые произведения и конечный объект.

(i) Пусть Γ — группа в $\mathcal{C}$, а T является Γ-торсором в $\mathcal{C}$, т.е. заданы групповая операция $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ и морфизм действия $\Gamma \times T \to T$, удовлетворяющие естественным свойствам. Покажите, что эти данные равносильны тому, чтобы для любого объекта U из $\mathcal{C}$ задать функториально по U структуру группы на $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, \Gamma)$ и структуру $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, \Gamma)$-торсора на $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, T)$.

(ii) Пусть Γ и Γ' — группы в $\mathcal{C}$, T является Γ-торсором, а T' является Γ'-торсором в $\mathcal{C}$. Пусть даны морфизм $f\colon \Gamma \to \Gamma'$ групп в $\mathcal{C}$ и морфизм $g\colon T \to T'$, коммутирующий с действиями групп. Докажите, что f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда g является изоморфизмом. (Указание: примените $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, -)$ для произвольного объекта U из $\mathcal{C}$ и воспользуйтесь леммой Йонеды.)

Упражнение 1.9. Проунипотентное пополнение торсоров

Пусть Γ является группой, T является Γ-торсором, а k является полем.

(i) Пусть X_0 является торсором относительного проунипотентного пополнения Γ^{un} группы Γ над k, и пусть дано отображение множеств $g_0\colon T \to X_0(k)$, коммутирующее с действиями групп Γ и $\Gamma^{un}(k)$

относительно естественного гомоморфизма групп $f^{un}\colon \Gamma \to \Gamma^{un}(k)$. Докажите, что тогда (Γ^{un}, X_0) является проунипотентным пополнением (Γ, T), т.е. начальным объектом в категории, состоящей из наборов (U, X, f, g), где U является проунипотентной группой над k, X является U-торсором, $f\colon \Gamma \to U(k)$ является гомоморфизмом групп, а $g\colon T \to X(k)$ является отображением, коммутирующим с действиями групп Γ и $U(k)$. (Указание: зафиксировав элемент $t \in T$, воспользуйтесь возникающей биекцией $T \simeq \Gamma$ и изоморфизмами $X_0 \simeq \Gamma^{un}$, $X \simeq U$, а также универсальным свойством Γ^{un} для того, чтобы построить морфизм $X_0 \to X$. Затем покажите, что данный морфизм не зависит от выбора элемента t. Для доказательства единственности подобного морфизма проверьте, что образ множества T в X плотен в топологии Зарисского.)

(ii) Предположим, что группа $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ конечно порождена. Докажите, что тогда для проунипотентного пополнения T^{un} имеется канонический изоморфизм $\mathcal{O}(T^{un}) \simeq \varinjlim_{n \geqslant 0} (k[T]/I^n k[T])^\vee$, где $k[T]$ обозначает k-векторное пространство, порожденное множеством T, а $I \subset k[G]$ является аугментационным идеалом. (Указание: при помощи формулы Квиллена для $\mathcal{O}(\Gamma^{un})$ проверьте, что $X_0 = \mathrm{Spec}\big(\varinjlim_{n \geqslant 0} (k[T]/I^n k[T])^\vee\big)$ является Γ^{un}-торсором, постройте отображение $T \to X_0(k)$ и воспользуйтесь пунктом (i).)

(iii) В предположении и обозначениях из пункта (ii) покажите, что возрастающая фильтрация $(k[T]/I^n k[T])^\vee$, $n \geqslant 0$, на $\mathcal{O}(T^{un})$ совпадает с проунипотентной фильтрацией на $\mathcal{O}(T^{un})$ относительно действия проунипотентной группы Γ^{un}. (Указание: как выглядит проунипотентная фильтрация в терминах двойственных алгебр?)