Листок 3. Нейтральные категории Таннаки

Пусть k является произвольным полем.

Упражнение 3.1. Таннакиевская группа

Пусть $\mathcal{C}$ — категория Таннаки над k, тензорно порожденная объектом S, т.е. $\mathcal{C} = \langle S \rangle_{\otimes}$, пусть $\omega\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}(k)$ — функтор слоя, и положим $V = \omega(S)$. Для набора чисел $\mu = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$, $n \geqslant 1$, $a_i, b_i \geqslant 0$ положим $S^\mu = \bigoplus_{i=1}^n S^{\otimes a_i} \otimes (S^\vee)^{\otimes b_i}$.

(i) Для произвольного подобъекта $T \subset S^\mu$ обозначим через $H_T \subset \mathrm{GL}(V)$ подгруппу, переводящую в себя подпространство $\omega(T)$ в представлении $\omega(S^\mu) = V^\mu$ группы $\mathrm{GL}(V)$. Положим

$$H = \bigcap_{\mu, T} H_T \subset \mathrm{GL}(V)\,.$$

Для произвольного подфактора R в S^μ и элемента $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, R)$ обозначим через G_x подгруппу в H, стабилизирующую элемент $\omega(x)(1) \in \omega(R)$ относительно естественного представления группы H на $\omega(R)$. Положим

$$G = \bigcap_{\mu, R, x} G_x \subset H\,.$$

Докажите, что тогда G сопадает с таннакиевской группой G_ω для $(\mathcal{C}, \omega)$ как подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$. (Указание: сначала проверьте, что $G_\omega \subset G$. Далее покажите, что элементы группы G задают тензорные автоморфизмы функтора слоя ω, пользуясь тем, что для любых объектов R_1, R_2 в $\mathcal{C}$ имеется изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R_1, R_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, R)$, где $R = R_1^\vee \otimes R_2$, а также тем, что R является подфактором в S^μ для некоторого μ.)

(ii) Пусть подгруппа $G \subset \mathrm{GL}(V)$ обладает следующим свойствами:

(a) для любого μ произвольное подпространство $U \subset V^\mu$ инвариантно относительно действия группы G тогда и только тогда, когда $U = \omega(T)$ для некоторого подобъекта $T \subset S^\mu$, (б) для любого μ и любого подфактора W в V^μ выполяется равенство $W^G = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, R)$, где R — подфактор в S^μ, для которого $\omega(R) = W$ и рассматривается естественное вложение

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, R) \hookrightarrow \omega(R)\,, \qquad x \longmapsto \omega(x)(1)\,.$$

(Указание: покажите, что имеется естественная эквивалентность категорий $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}(G)$, переводящая ω в забывающий функтор слоя.)

Упражнение 3.2. Таннакиевские группы некоторых представлений

(i) Пусть Γ — произвольная (дискретная) группа, и пусть дано конечномерное представление $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V)$ над полем k. Покажите, что тогда таннакиевская группа категории Таннаки $\langle V \rangle_\otimes \subset \mathrm{Rep}^f(\Gamma)$ с забывающим функтором слоя как подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$ совпадает с замыканием в топологии Зарисского $\overline{\rho(\Gamma)}$ образа $\rho(\Gamma) \subset \mathrm{GL}(V)$. (Указание: покажите, что $\overline{\rho(\Gamma)}$ удовлетворяет условиям из упражнения 3.1(ii) и воспользуйтесь этим упражнением.)

(ii) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k, и пусть дано конечномерное представление $\lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ над полем k. Покажите, что тогда таннакиевская группа категории Таннаки $\langle V \rangle_\otimes \subset \mathrm{Rep}^f(\mathfrak{g})$ с забывающим функтором слоя как подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$ совпадает с наименьшей алгебраической подгруппой G в $\mathrm{GL}(V)$, для которой ее алгебра Ли $\mathrm{Lie}(G)$ содержит образ $\lambda(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ (ср. с упражнением 3.3(v) из курса "Дифференциальная теория Галуа"). (Указание: покажите, что G удовлетворяет условиям из упражнения 3.1(ii) и воспользуйтесь этим упражнением.)

Упражнение 3.3. Таннакиевские группы некоторых категорий, связанных с расширением полей

Пусть дано расширение полей $k \subset K$.

(i) Пусть категория $\mathcal{C}_K$ состоит из пар (V, α), где V — конечномерное векторное пространство над k, а $\alpha\colon V_K \xrightarrow{\sim} V_K$ его автоморфизм над K. Имеется нейтральный функтор слоя $\omega\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}(k)$,

$(V,\alpha)\mapsto V$. Покажите, что тогда таннакиевская группа категории Таннаки $\langle (V,\alpha)\rangle_\otimes \subset \mathcal{C}$ с функтором слоя ω как подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$ совпадает с наименьшей алгебраической подгруппой G в $\mathrm{GL}(V)$, для которой ее группа K-точек $G(K)$ содержит элемент $\alpha\in \mathrm{GL}(V)(K)=\mathrm{Isom}_K(V_K,V_K)$. В частности, если $k=K$, то G совпадает с замыканием в топологии Зарисского подгруппы в $\mathrm{GL}(V)$, порожденной α (ср. с упражнением 3.2(i)) (Указание: покажите, что G удовлетворяет условиям из упражнения 3.1(ii) и воспользуйтесь этим упражнением.)

(ii) Пусть категория $\mathcal{D}_K$ состоит из наборов (V,V',β), где V,V' — конечномерные векторные пространства над k, а $\beta\colon V_K \xrightarrow{\sim} V'_K$ изоморфизм между ними над K. Имеется нейтральный функтор слоя $\omega\colon \mathcal{C}\to \mathrm{Vect}(k)$, $(V,V',\beta)\mapsto V$. Обозначим через $\underline{\mathrm{Isom}}(V,V')$ многообразие k-линейных изоморфизмов между V и V'. В частности, $\underline{\mathrm{Isom}}(V,V')$ является $\mathrm{GL}(V)$-торсором над k. Докажите, что тогда таннакиевская группа категории Таннаки $\langle (V,V',\beta)\rangle_\otimes \subset \mathcal{D}_K$ с функтором слоя ω как подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$ совпадает с наименьшей алгебраической подгруппой G в $\mathrm{GL}(V)$, для которой существует (единственный) G-торсор $T\subset \underline{\mathrm{Isom}}(V,V')$ группа K-точек которого $T(K)$ содержит элемент $\beta\in \underline{\mathrm{Isom}}(V,V')(K)=\mathrm{Isom}_K(V',V)$. (Указание: сначала проверьте, что такая наименьшая подгруппа G существует, рассматривая пересечения алгебраических подгрупп в $\mathrm{GL}(V)$ и их торсоров в $\underline{\mathrm{Isom}}(V',V)$. Далее рассмотрите такую конструкцию: для подгруппы $H\subset \mathrm{GL}(V)$ и H-торсора $P\subset \underline{\mathrm{Isom}}(V,V')$ произвольное H-инвариантное подпространство $U\subset V$ и произвольный H-инвариантный вектор $v\in V$ канонически определяют подпространство $U'\subset V'$ и вектор $v'\in V'$ по формулам

$$U'=\mathrm{Im}\big(U\times_H P\longrightarrow V\times_{\mathrm{GL}(V)}\underline{\mathrm{Isom}}(V,V')\xrightarrow{\sim} V'\big)\,,$$

$$v'=\mathrm{Im}\big(\{v\}\times_H P\longrightarrow V\times_{\mathrm{GL}(V)}\underline{\mathrm{Isom}}(V,V')\xrightarrow{\sim} V'\big)\,.$$

При помощи этого покажите, что G удовлетворяет условиям из упражнения 3.1(ii) и воспользуйтесь этим упражнением.)

(iii) Пусть H — алгебраическая группа над K и пусть категория $\mathcal{E}_K$ сотоит из пар (V,ρ), где V — конечномерное векторное пространство над k, а $\rho\colon H\to \mathrm{GL}(V_K)$ — представление группы H над K. Докажите, что тогда таннакиевская группа категории Таннаки $\langle (V,\rho)\rangle_\otimes$

над k с функтором слоя $(V,\rho)\mapsto V$ как подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$ совпадает с наименьшей алгебраической подгруппой G в $\mathrm{GL}(V)$ над $\mathbb{Q}$, для которой G_K содержит алгебраическую подгруппу $\rho(H)\subset \mathrm{GL}(H_K)$. (Указание: покажите, что G удовлетворяет условиям из упражнения 3.1(ii) и воспользуйтесь этим упражнением.)

Упражнение 3.4. Таннакиевская группа чистых структур Ходжа

(i) Проверьте, что для категории Таннаки конечномерных градуированных векторных пространств над k с изоморфизмом симметрии без учета знаков и с естественным функтором слоя соответствующая таннакиевская групп изоморфна $\mathbb{G}_m$. (Указание: как устроены представления группы $\mathbb{G}_m$?)

(ii) Пусть алгебраическая группа $\mathbb{S}$ над $\mathbb{R}$ состоит из матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right)$. Покажите, что имеется изоморфизм $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}\simeq \mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m$ алгебраических групп над $\mathbb{C}$, при котором комплексное сопряжение, естественно действующее на левой части, переходит в отображение $(z_1,z_2)\mapsto(\bar z_2,\bar z_1)$, где $z_i\in\mathbb{C}^*=\mathbb{G}_m(\mathbb{C})$. (Указание: рассмотрите морфизм

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}\longrightarrow \mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m,\qquad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right)\longmapsto (a+bi,a-bi)\,,$$

алгебраических групп над $\mathbb{C}$.)

(iii) Вещественная чистая структура Ходжа веса $n\in\mathbb{Z}$ — это пара $(H_{\mathbb{R}},F^\bullet V_{\mathbb{C}})$, где $H_{\mathbb{R}}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $F^\bullet H_{\mathbb{C}}$ — убывающая фильтрация на $H_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющая стандартному условию на фильтрацию Ходжа веса n (см., например, упражнение 2.2). Возникает категория Таннаки над $\mathbb{R}$, состоящая из прямых сумм вещественных чистых структур Ходжа различных весов, с функтором слоя $(H_{\mathbb{R}},F^\bullet H_{\mathbb{C}})\mapsto H_{\mathbb{R}}$. Покажите, что соответствущая таннакиевская группа изоморфна $\mathbb{S}$. (Указание: задать представление группы $\mathbb{S}\to\mathrm{GL}(V)$ в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ — это то же самое, что задать представление группы $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}\to\mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$ в векторном пространстве $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$, коммутирующее с комплексным сопряжением, действующим на $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$

и на $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$. По пункту (ii) это равносильно тому, чтобы задать представление $\rho\colon \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$ над $\mathbb{C}$, для которого $\tau(\bar{z}_2, \bar{z}_1) = \overline{\rho(z_1, z_2)}$. Наконец, представление τ соответствует разложению $V_{\mathbb{C}} \simeq \bigoplus\limits_{p,q} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$, где (z_1, z_2) действует на $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ как $z_1^p z_2^q$.)

(iv) Заметим, что имеется каноническое вложение алгебраических групп $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{S}$, $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. Это соответствует тому, что функтор слоя пропускается канонически через категорию градуированных вещественных векторных пространств. Покажите, что данная градуировка задается весом вещественных чистых структур Ходжа, т.е. что для вещественной чистой структуры Ходжа $(H_{\mathbb{R}}, F^{\bullet}H_{\mathbb{C}})$ веса n соответствующее представление $\mathbb{S} \to \mathrm{GL}(H_{\mathbb{R}})$ в ограничении на $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{S}$ задается характером $a \mapsto a^n$.

(v) Заметим, что имеется канонический сюръективный гомоморфизм групп $\det\colon \mathbb{S} \to \mathbb{G}_m$. Какой одномерной вещественной чистой структуре Ходжа соответствует тавтологическое представление фактора $\mathbb{G}_m$ группы $\mathbb{S}$?

(vi) Пусть $(H, F^{\bullet}H_{\mathbb{C}})$ — рациональная чистая структура Ходжа. Тогда $(H_{\mathbb{R}}, F^{\bullet}H_{\mathbb{C}})$ — вещественная чистая структура Ходжа и по пункту (iii) возникает представление $\rho\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GL}(H_{\mathbb{R}})$. Докажите, что тогда таннакиевская группа категории Таннаки $\langle (H, F^{\bullet}H_{\mathbb{C}}) \rangle_{\otimes}$ над $\mathbb{Q}$ с функтором слоя $(H, F^{\bullet}H_{\mathbb{C}}) \mapsto H$ как подгруппа в $\mathrm{GL}(H)$ совпадает с наименьшей алгебраической подгруппой G в $\mathrm{GL}(H)$ над $\mathbb{Q}$, для которой $G_{\mathbb{R}}$ содержит алгебраическую подгруппу $\rho(\mathbb{S}) \subset \mathrm{GL}(H_{\mathbb{R}})$. (Указание: воспользуйтесь пунктом (iii) и упражнением 3.3(iii).)

Упражнение 3.5. Морфизмы проалгебраических групп и категории представлений

Пусть $\varphi\colon G \to H$ — морфизм линейных проалгебраических групп.

(i) Докажите, что φ является сюръективным морфизмом тогда и только тогда, когда образ функтора $\mathrm{Rep}^f(H) \to \mathrm{Rep}^f(G)$ замкнут относительно взятия подфакторов. (Указание: импликация в одну сторону очевидна. Для доказательства импликации в другую сторону рассмотрите идеал $I = \mathrm{Ker}\big(\mathcal{O}(H) \to \mathcal{O}(G)\big)$. Данный фактор представления группы H в категории $\mathrm{Rep}(G)$ может быть фактором в категории $\mathrm{Rep}(H)$ только тогда, когда $\varphi(G) \subset H$ является H-инвариантным подмногообразием, т.е. когда $\varphi(G) = H$.)

(ii) Докажите, что φ является замкнутым вложением тогда и только тогда, когда любой объект в $\mathrm{Rep}^f(G)$ является подфактором объекта из образа функтора $\mathrm{Rep}^f(H) \to \mathrm{Rep}^f(G)$. (Указание: если φ замкнутое вложение, то $\mathcal{O}(G)$ является фактором $\mathcal{O}(H)$ как представления группы G. Далее воспользуйтесь тем, что любое n-мерное представление группы G является подпредставлением в $\mathcal{O}(G)^{\oplus n}$. Наоборот, если $\mathcal{O}(G)$ можно представить как подфактор в $\mathcal{O}(H)$ как представления группы G, то $\mathrm{Ker}(\varphi)$ действует на $\mathcal{O}(G)$ тривиально и, значит, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1\}$.)

Упражнение 3.6. Дополнительная структура на таннакиевской группе

Пусть $\mathcal{C}$ — категория Таннаки над k с нейтральным функтором слоя $\omega\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}(k)$, а G_ω — соответствующая таннакиевская группа.

(i) Действие группы G_ω на самой себе левыми сдвигами и, соответственно, на $\mathcal{O}(G_\omega)$, задает алгебру A_ω в категории $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Rep}(G_\omega)$, для которой $\omega(A_\omega) = \mathcal{O}(G_\omega)$ (ср. с алгебрами Пикара–Вессио для тех, кто знаком с ними). Найдите явное описание алгебры A_ω в $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ в терминах $\mathcal{C}$ и ω. Таким образом, возникает аффинная схема $X_\omega = \mathrm{Spec}(A_\omega)$ в $\mathcal{C}$. Покажите, что для любого нейтрального функтора слоя $\eta\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}(k)$ имеется канонический изоморфизм алгебр $\eta(A_\omega) \simeq \mathcal{O}\big(I(\eta,\omega)\big)$, т.е. что имеется изоморфизм аффинных схем $\eta(X_\omega) \simeq I(\eta,\omega)$. (Указание: рассмотрите коядро в $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$

$$A_\omega = \mathrm{Coker}\left(\bigoplus_{S,T\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,T)\otimes_k \mathrm{Hom}_k(\omega(T),S) \longrightarrow \bigoplus_{S\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_k(\omega(S),S)\right).$$

Далее действуйте подобно доказательству представимости схемы $I(\eta,\omega)$.)

(ii) Действие группы G_ω сопряжениями на самой себе, соответственно, на $\mathcal{O}(G_\omega)$, задает алгебру Хопфа B в категории $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Rep}(G)$, для которой $\omega(B) \simeq \mathcal{O}(G_\omega)$. Найдите явное описание алгебры

Хопфа B в $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ в терминах $\mathcal{C}$ и, в частности, покажите, что она не зависит от выбора функтора слоя. Таким образом, возникает каноническая линейная проалгебраическая группа $G = \mathrm{Spec}(B)$ в $\mathcal{C}$. Покажите, что для любого нейтрального функтора слоя ω имеется канонический изоморфизм линейных проалгебраических групп $\omega(G) \simeq G_\omega$. При этом X_ω является G-торсором в $\mathcal{C}$. (Указание: рассмотрите коядро в $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$

$$B = \mathrm{Coker}\left(\bigoplus_{S,T\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,T) \otimes_k \underline{\mathrm{Hom}}(T,S) \longrightarrow \bigoplus_{S\in\mathcal{C}} \underline{\mathrm{Hom}}(S,S)\right).$$

Далее действуйте подобно доказательству представимости схемы $I(\eta,\omega)$.)

(iii) Предположим для простоты, что $\mathcal{C}$ порожается тензорно одним объектом, т.е. что $\mathcal{C} = \langle S\rangle_\otimes$ для некоторого объекта S из $\mathcal{C}$. Покажите, что тогда существует каноническая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{C}$, для которой $\omega(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Lie}(G_\omega)$ для любого нейтрального функтора слоя ω. (Указание: рассмотрите алгебру Ли для алгебры Хопфа B в $\mathcal{C}$ из пункта (ii). Равносильно, рассмотрите присоединенное представление группы G_ω в $\mathrm{Lie}(G_\omega)$.)

Упражнение 3.7. Периоды алгебр

(i) Пусть $\mathcal{C}$ — категория Таннаки над k и пусть ω — нейтральный функтора слоя. Тогда для любого объекта $S \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ и элемента $l \in \omega(S)^\vee$ возникает канонический морфизм $S \to \omega(S)^\vee \otimes_k S \to A_\omega$ в категории $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$, где A_ω как в упражнении 3.6(i). Докажите, что если на S задана структура коммутативной алгебры в $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$, т.е. $Y = \mathrm{Spec}(S)$ является аффинной схемой в $\mathcal{C}$, и при этом l соответствует k-точке $x \in \omega(Y)(k)$, то указанный выше морфизм $S \to A_\omega$ является морфизмом алгебр в $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$. (Указание: проверьте, что после применения функтора ω морфизм $S \to A_\omega$ соответствует морфизму $G_\omega \to \omega(Y)$, $g \mapsto g(x)$ аффинных схем над k.)

(ii) Пусть η — еще один функтор слоя. Покажите, что тогда в предположениях из пункта (i) образ отображения $\eta(S) \to \omega(S)^\vee \otimes_k \eta(S) \to \mathcal{O}\big(I(\eta,\omega)\big)$ является G_η-инвариантной подалгеброй. (Указание: воспользуйтесь пунктом (i) и примените функтор η.)