Независимый Московский Университет, весна 2020

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ

Лекция 2 (20 февраля 2020): Пространство модулей кривых как множество

В этой лекции мы введём понятия теории алгебраических кривых, необходимые для определения *множеств* $\mathcal{M}_g(\Bbbk)$.

2.0. Абстрактные алгебраические кривые

2.0.0. Обозначения. Начало предыдущей лекции, посвящённое нормированиям полей, может показаться никак не связанным с её основной частью, в которой был дан набросок основных определений классической теории кривых. Связь между этими группами понятий, которая была намечена в простейшем случае (*прямая – кривая*) будет установлена в настоящей лекции в естественной общности.

Мы по-прежнему работаем над *основным* алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, которое предполагается настолько фиксированным, насколько можно. И рассматриваем его конечнопорождённыЕ расширениЯ

$$\mathcal{K} \supset \Bbbk$$

степени трансцендентности 1; хотя сегодня мы будем работать с ОДНИМ таким расширением, не следует забывать, что цель курса – ДЕФОРМАЦИИ таких расширений.

В этой лекции мы перейдём от аффинной геометрии к проективной и будем использовать стандартное обозначение (см., например, [**Шафаревич2007**]).

$$\mathbf{P}_n(\Bbbk) := \frac{\mathbf{A}_{n+1}(\Bbbk) \setminus \{0\}}{\Bbbk^\times};$$

не вполне стандартно точки проективного пространства будем обозначать

$$\mathbf{P}_n(\Bbbk) \ni (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = \big[(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big]_{\Bbbk^\times}.$$

Как обычно, полагаем $\mathbf{A}_n(\Bbbk) \hookrightarrow \mathbf{P}_n(\Bbbk)$ на основе соглашения

$$\mathbf{P}_n(\Bbbk) \supset \mathbf{A}_n(\Bbbk) = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)\right\}.$$

Ещё восстановим основное для дальнейшего обозначение

$$\mathrm{Val}_{\Bbbk}(\mathcal{K}) := \Big\{\text{нормирования } \mathcal{K} \to \mathbb{Z} \coprod \{\infty\}\Big\}.$$

2.0.1. Нормирования как точки кривых. В предыдущей лекции в подразделе 1.0.4 была установлена теорема

$$\mathrm{Val}_{\Bbbk}\big(\Bbbk(x)\big) = \{\mathrm{ord}_\alpha \mid \alpha \in \Bbbk\} \coprod \{\mathrm{ord}_\infty\}.$$

При стандартной интерпретации $\mathbf{P}_1(\Bbbk) \simeq \big(\Bbbk \coprod \{\infty\}\big)$ это равенство превращается в биекцию

$$\mathrm{Val}_{\Bbbk}\big(\Bbbk(x)\big) \simeq \mathbf{P}_1(\Bbbk).$$

Цель настоящего подраздела – обобщить эту биекцию на произвольные *кривые*.

Как это ни парадоксально, нам хотелось бы объявить множество $\mathrm{Val}_{\Bbbk}(\mathcal{K})$ *моделью* поля $\mathcal{K}$, научиться думать об этом множестве как о КРИВОЙ и считать его элементы. то есть нормирования, ТОЧКАМИ этой кривой. Мешает Евклид, с точки зрения которого (см. [**Евклид1948**]) *точка... не имеет частей.* А нормирование – объект довольно сложный, и вряд ли Евклид согласился бы считать его точкой.

Мы преодолеем обсуждаемое затруднение не вполне честным формальным трюком: применим биекцию и введём "новое" множество

$$\mathbf{X} :\cong \mathrm{Val}_{\Bbbk}(\mathcal{K}),$$

которое будем назвать *абстрактной кривой*, а элементы этого множества, которые будем уже без всяких моральных сомнений называть *точками*и стараться обозначать $P \in \mathbf{X}$ (от слова Point) и другими близкими буквами.

Обозначение для биекции введём лишь в одну сторону, обобщая простейший пример из лекции 1:

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Val}_{\Bbbk}(\mathcal{K}) : P \mapsto \mathrm{ord}_{\mathrm{P}};$$

Итак, для $x \in \mathcal{K}^\times$ имеем $\mathrm{ord}_{\mathrm{P}}(x) \in \mathbb{Z}$, тогда как $\mathrm{ord}_{\mathrm{P}}(0) = \infty$.

Наше обозначение не вполне стандартно[1], но легко запоминаемо. Остаётся придать ему естественный смысл для тех кривых, которые мы уже освоили.

2.0.2. Абстрактные и вложенные кривые. Сначала уточним наши временные понятия и обозначения. Для многочлена $f \in \Bbbk[x, y]$ по-прежнему будем рассматривать множество его нулей $\mathrm{zer}_f \subset \mathbf{A}_2(\Bbbk)$, но теперь, с учётом вложения аффинной плоскости в проективную $\mathbf{A}_2(\Bbbk) \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$, введём новое обозначение

$$\dot{\mathbf{X}} := \mathrm{zer}_f = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbf{A}_2(\Bbbk) \mid \quad f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0\}.$$

---

[1]В [**Серр1968**] используется обозначение v_P вместо нашего $\mathrm{ord}_{\mathrm{P}}$ – но, наряду с $v_P(f)$ для функций $f \in \Bbbk(\mathcal{K})$, употребляется не только $v_P(\omega)$ для дифференциалов $\omega \in \Omega^1(\mathcal{K})$, что ещё можно было бы считать законным обобщением, но и $v_P(D)$ для дивизоров $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{K})$, что,на наш взгляд, совершенно недопустимо. Пришлось отклонится от традиций почтенной книги.

Теперь, когда не будем называть эту кривую аффинной моделью своего поля рациональных функций, будем называть её *проколотой кривой*, имея в виду вложение

$$\dot{\mathbf{X}} \hookrightarrow \mathbf{X} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk),$$

где $\mathbf{X}$ – *проективное замыкание* аффинной кривой $\dot{\mathbf{X}}$.

На проективной плоскости введённые выше координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ обычно сопровождаются соглашением $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$, то есть при $x_0 \neq 0$ подразумевается равенство в однородных координатах $(1 : x : y) = (x_0 : x_1 : x_2)$. Более удобны, однако, ненумерованные (и тоже традиционные) координаты $(x : y : z)$ получаются из предыдущих циклической перестановкой: при $z \neq 0$ подразумевается

$$(x : y : z)_{\in \mathbf{P}_2(\Bbbk)} = \left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right)_{\in \mathbf{P}_2(\Bbbk)} \longleftrightarrow (x, y)_{\in \mathbf{A}_2(\Bbbk)}.$$

Переформулировка: вышеупомянутое вложение в координатах имеет вид

$$\mathbf{A}_2(\Bbbk) \hookrightarrow \mathbf{P}_2(\Bbbk) : (x, y) \mapsto (x : y : 1).$$

Мы зафиксировали традицию использовать одни и те же буквы для аффинных (неоднородных) и для проективных (однородных) координат.

Вообще-то в проективной плоскости рассматривается не одна аффинная, а три, покрывающие её: ведь первая/последняя координата не выделена ничем, кроме традиции. Общепринятых обозначений для этих аффинных плоскостей (по очевидным причинам часто называемых *картами*) нет, так что вводим понятные: $\mathbf{P}_2(\Bbbk)_{x\neq 0}$, $\mathbf{P}_2(\Bbbk)_{y\neq 0}$ и $\mathbf{P}_2(\Bbbk)_{z\neq 0}$. Очевидно,

$$\mathbf{P}_2(\Bbbk)_{x\neq 0} \bigcup \mathbf{P}_2(\Bbbk)_{y\neq 0} \bigcup \mathbf{P}_2(\Bbbk)_{z\neq 0} = \mathbf{P}_2(\Bbbk)$$

– поскольку проективная плоскость не содержит точки (0:0:0).

Проективное замыкание $\dot{\mathbf{X}} \hookrightarrow \mathbf{X} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ определяется следующим образом. Пусть неприводимая кривая $\dot{\mathbf{X}}$ задана уравнением[2] $f(x, y) = 0$; тогда кривая $\mathbf{X}$ задаётся в однородных координатах $(x : y : z)$ уравнением

$$z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \tag{2.0.2a}$$

где $d = \deg f$ – *степень* многочлена. Можно пользоваться обычным определением степени (через максимальную степень входящего в f ненулевого монома ax^iy^j), а можно определить d как наименьшее, при котором левая часть (2.0.2) – неприводимый многочлен (при большем d у множества решений уравнения (2.02a) в качестве компоненты возникает "бесконечная" прямая, задаваемая уравнением $z = 0$).

Карты будем для краткости обозначать "$x \neq 0$", "$y \neq 0$" и $z \neq 0$", используя в двух первых, как и в последней, обозначенные теми же буквами аффинные координаты (x, z) и (y, z). Переход от аффиных координат к проективным, скажем, в карте $z \neq 0$" осуществляется приписыванием к каждому моному x^iy^j монома z^{d-i-j}, а от проективных к аффинным, например, в карте "$y \neq 0$" –

[2] для краткости мы сейчас пренебрегаем соображениями обо обозначениях (см. Приложение к лекции 1) и пользуемся общепринятыми.

приравниванием $y = 1$.

Карту $z \neq 0$" мы всё же будем считать основной и относиться к тому, что происходит вне её (то есть на прямой $z = 0$), как к явлениям "на бесконечности". Отметим, что во введённых выше обозначениях

$$\dot{\mathbf{X}} = \{(x : y : z) \in \mathbf{X} \mid z \neq 0\}.$$

Посмотрим, как устроены проективные замыкания введённых выше аффинных кривых. Вещественные картинки рисовать не будем, предоставляя это читателю. Пока будем в основном интересоваться добавляемыми на бесконечности точками, определяя (точные определения будут позже) *гладкие* они или *особые*; при первом знакомстве можно доверять вещественным картинкам. Точка с координатами (0,0) (в какой-нибудь системе аффинных координат) особа тогда и только тогда, когда уравнение кривой не содержит мономов первой степени. Если $d = 3$, то есть мы имеем дело с *кубической кривой*, то гладкая точка называется *точкой перегиба*, если касательная к ней касается кривой (не двукратно, а) трёхкратно, то есть пересекает кривую только в точке касания.

Полукубическая парабола. Её уравнение $y^2 = x^3$ превращается в $y^2 z = x^3$. На бесконечности добавляется одна точка:

$$\mathbf{X} \setminus \dot{\mathbf{X}} = \{(0 : 1 : 0).$$

В карте "$y \neq 0$" это – точка перегиба так называемой *кубической параболы* $z = x^3$.

Декартов лист. Его уравнение $y^2 = x^3 + x^2$ превращается в $y^2 z = x^3 + x^2 z$. Всё происходит примерно так же, как в предыдущем примере, поскольку (неформально) при $x, y \to \infty$ слагаемое x^2 пренебрежимо по сравнению с x^3. Детали предоставляются читателю.

Окружность с известным всем уравнением $x^2 + y^2 = 1$ кажется целиком, без всяких проколов, содержащейся в аффинной части плоскости. Это, однако, иллюзия начинающего, воспитанного на вещественной математике – а мы, напомним, предполагаем основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнутым и, в частности, невозможно $\cancel{\Bbbk = \mathbb{R}}$. В проективной плоскости $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ уравнение превращается в

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{2.0.2b}$$

и на бесконечности, то есть при $z = 0$, обнаруживаем две "мнимые" точки с координатами[3] $(1 : \pm \mathrm{i} : 0)$. В карте "$x \neq 0$" уравнение (2.0.2b) задаёт *гиперболу* $1 = z^2 - y^2$, и вклеенные точки оказываются гладкими.

Легко видеть, что через те же точки проходят все "окружности", то есть кривые из семейства $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Это замечание устанавливает соответствие между школьной формулировкой *через любые три точки проходит окружность, причём единственная*и взрослой *через любые пять точек проходит коника* (то есть кривая

---

[3] в основном поле фиксируется $\mathrm{i} \in \Bbbk$ – один из корней многочлена $x^2 + 1$. Трудности возникают при $\mathrm{char}(\Bbbk) = 2$, но мы, как и все, исключим эту возможность из рассмотрения.

степени 2), *причём единственная*[4]. В школе две из пяти точек фиксируются.

Квартика Ферма. Эта кривая гораздо сложнее окружности, но её поведение на бесконечности анализируется аналогично. Уравнение $x^4 + y^4 = 1$ превращается в $x^4 + y^4 = z^4$, и разность $\mathbf{X} \setminus \dot{\mathbf{X}}$ оказывается состоящей из четырёх гладких точек. Предоставляем читателю проверку.

***

До сих пор мы рассматривали индивидуальные кривые. Все они рациональны и бирационально изоморфны между собой, так что с точки зрения предмета нашего курса интереса не представляют; мы работали с ними просто для того, чтобы на простых примерах привыкнуть к переходу от аффинной кривой к её проективному замыканию. Теперь мы перейдём к эллиптическим кривым, зависящим от параметра (мы по историческим причинам назвали его *эксцентриситетоми* обозначили e) и доставляющим первый нетривиальный пример пространств модулей.

Плоская кубика. Известно много стандартных форм уравнений кубических кривых: они интенсивно изучаются, начиная с [**Newton1676**]. Мы поработаем с уравнением (1.1.1l) из лекции 1, $y^2 = x(x-e)\big(x - \frac{1}{e}\big)$. Перейдя обычным образом от аффинных координат к проективным, впервые получим не рациональную гладкую проективную кривую

$$y^2 z = x(x-ez)\big(x - \frac{1}{e}z\big) \tag{2.0.2c}$$

В карте "$y \neq 0$" получаем $z = x(x-ez)\big(x - \frac{1}{e}z\big)$, эта кривая гладка в точке $(x,z) = (0,0)$ и пересечение пополненной кривой с (бесконечной) прямой $z = 0$ трёхкратно. Таким образом, на бесконечности вклеилась одна гладкая точка перегиба.

Мы получили ИДЕАЛЬНУЮ гладкую проективную модель поля

$$\mathfrak{ff}\Big(\frac{\Bbbk[x,y]}{\langle -y^2 + x(x-e)\big(x - \frac{1}{e}\big)\rangle}\Big).$$

Квартика Лежандра[5]. Введя $m = \frac{1-e}{1+e}$, так что $m \notin \{0,1\}$, перепишем аффинное уравнение (1.1.1j') в виде $v^2 = (u^2+m)(u^2+\frac{1}{m})$. Тогда, переходя от аффинных координат (u,v) к проективным $(u:v:w)$, получим уравнение

$$v^2 w^2 = (u^2 + mw^2)(u^2 + \frac{w^2}{m}). \tag{2.0.2d}$$

В (очевидным образом определяемой) карте "$v \neq 0$" получаем более сложное, чем раньше, уравнение $w^2 = (u^2+mw^2)(u^2+\frac{w^2}{m})$ в аффинных координатах (u,w). Это уравнение в точке $(u,w) = (0,0)$ задаёт особенность невиданного раньше типа: локально две касающиеся друг друга параболы $w = \pm u^2$.

---

[4] предоставляем читателю разбор *вырожденных* случаев, когда 3 точки коллинеарны...

[5] Название не общепринятое, но рассматриваемое нами уравнение легко сводится к стандартному $v^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2)$.

Чтобы получить из этой проективной кривой гладкую модель, полученную особенность придётся *разрешать*; мы будем учиться этому в последующих лекциях.

2.0.3. Структурный пучок. Недостаточно просто объявить некоторое множество кривой; надо снабдить его структурой, дающей (неформальное) моральное право называть его элементы ТОЧКАМИ.

Мы снабдим наши множества $\mathbf{X} \cong \mathrm{val}_{\Bbbk}(\mathcal{K})$ структурой *окольцованного пространства*. Это значит, что (а) само множество будет наделено топологией; (б) каждому его открытому подмножеству будет сопоставлено кольцо.

От окольцованного пространства требуется, чтобы введённые кольца были связаны системой согласованных морфизмов. Проще всего определить эту систему, связав с частично упорядоченным (включением) множеством открытых множеств $\mathbf{OP_X}$ малую категорию $\mathcal{OP}_\mathbf{X}$ и потребовав, чтобы сопоставление открытым множествам колец было *кофунктором*.

Расширение объектов алгебраической геометрии от подмножеств проективных пространств, определяемых полиномиальными уравнениями, до некоторого класса окольцованных пространств, называемых *схемами* – один из жизненных подвигов Александра Гротендика; впрочем, его совместный с Ж. Дьёдонне многотомный труд [**GroDieu1960**] так и не был дописан.

Теория схем Гротендика – возможно, один из труднейших разделов современной математики; однако в случае кривых над фиксированным алгебраически замкнутым полем основные объекты могут быть введены со сравнительно небольшими усилиями.

Итак, фиксируем $\mathbf{X} \cong \mathrm{val}_{\Bbbk}(\mathcal{K})$. Мы введём на $\mathbf{X}$ весьма неклассическую топологию, так называемую (одномерную) *топологию Зариского*. Открытыми в ней объявляются пустое и дополнение к конечным множествам[6]. Поскольку в силу алгебраической замкнутости основного поля $\Bbbk$ множество $\mathbf{X}$ бесконечно, то топология нехаусдорфова, а любое открытое множество всюду плотно.

Топологическое (теперь) пространство $\mathbf{X}$ *окольцовывается* так называемым *структурным пучком* $\mathcal{O} : \mathcal{OP}_\mathbf{X} \to\!\!\to \mathcal{ANN} : U \mapsto\!\!\mapsto \mathcal{O}(U)$, где $\mathcal{O}(\varnothing) := \mathcal{K}$, а для непустого открытого подмножества $U \in \mathbf{OP_X}$

$$\mathcal{O}(U) := \big\{ f \in \mathcal{K} \mid \forall P \in U [\mathrm{ord}_P(f) \geq 0] \big\}.$$

Из аксиом нормирования следует, что все такие $\mathcal{O}(U)$ – кольца (проверьте!). Их интуитивный смысл будет вскоре прояснён.

Упомянутая выше кофункториальность заключается в наличии для любых

[6]постороннее применение этой топологии: если ввести её на $\mathbb{N}$, то для любого топологического пространства $\mathbf{T}$ любая имеющая предел последовательность $t : \mathbb{N} \to \mathbf{T} : n \mapsto t_n$ непрерывна.

двух открытых множеств $U \subseteq V$ морфизмов колец

$$\rho_U^V : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U),$$

называемых *морфизмами ограничения.* В нашем случае все они являются вложениями друг в друга подколец поля $\mathcal{K}$ и потому очевидно удовлетворяют требуемым соотношениям

$$\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(U)} \text{ и } \rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W \text{ для всех } U \subseteq V \subseteq W.$$

Ещё для каждой точки $P \in \mathbf{X}$ введём *локальное кольцо*

$$\mathcal{O}_P := \{f \in \mathcal{K} \mid \mathrm{ord}_P(f) \geq 0\} = \bigcup_{P \in U \in \mathbf{OP}_\mathbf{X}} \mathcal{O}(U).$$

Оно содержит единственный *максимальный идеал*

$$\mathcal{O}_P \rhd \mathfrak{m}_P := \{f \in \mathcal{K} \mid \mathrm{ord}_P(f) > 0\}.$$

Этот идеал максимален, потому что из $f \in \mathcal{O}_P \setminus \mathfrak{m}_P$ следует $\mathrm{ord}_P(f) = 0$ и потому из $0 = \mathrm{ord}_P\big(f \cdot \frac{1}{f}\big) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P\big(\frac{1}{f}\big)$ получаем $\mathrm{ord}_P\big(\frac{1}{f}\big) = 0$, то есть $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_P$ и, следовательно, $f \in \mathcal{O}_P^\times$.

Предложение. *Для любой точки $P \in \mathbf{X}$ имеет место изоморфизм*

$$\boxed{\frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{m}_P} \cong \Bbbk}$$

Доказательство. Фактор кольца по максимальному идеалу – поле, а, поскольку $\Bbbk \bigcap \mathfrak{m}_P = 0$, поле $\frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{m}_P}$ является расширением поля $\Bbbk$. Остаётся убедиться, что для любого $x \in \mathcal{O}_P$ найдётся такой $c \in \Bbbk$, что $x - c \in \mathfrak{m}_P$.

Если $x \in \Bbbk$, то доказывать нечего. Предположим, что $x \in \mathcal{K} \setminus \Bbbk$; тогда, как мы знаем, найдётся такой $y \in \mathcal{K}$, что $\mathcal{K} = \Bbbk(x, y)$, и такой $f \in \Bbbk[\mathsf{x}, \mathsf{y}] \setminus \Bbbk$, что $f(x, y) = 0$.

В силу сюръективности ord_P найдётся такой элемент $z \in \mathcal{K}$, что $\mathrm{ord}_P(z) = 1$. Пусть $z = \frac{a}{b}$, где $a, b \in \Bbbk[x, y]$. Поскольку и $\mathrm{ord}_P(a) \geq 0$ и $\mathrm{ord}_P(b) \geq 0$, то отсюда и из $1 = \mathrm{ord}_P(a) - \mathrm{ord}_P(b)$ следует, что $\mathrm{ord}_P(a) > 0$. ИСКЛЮЧИВ y из двух полиномиальных равенств $f(x, y) = 0, a(x, y) = 0$, найдём требуемое значение x.■

Теперь мы готовы учиться смотреть на элементы функционального поля как на *почти*-функции, то есть функции, определённые вне конечного числа точек. Хороший исходный класс примеров – "школьные" рациональные функции $r = \frac{p}{q} \in \Bbbk(x)$, где $p, q \in \Bbbk[x]$; эта почти-функция определена вне нулей q. Однако, как объяснялось в лекции 1, школьное обозначение $x \mapsto r(x)$ никуда не годится: x – элемент функционального поля, а не точка прямой.

Вернёмся к общему случаю модели $\mathbf{X}$ поля $\mathcal{K}$. Пусть $r \in \mathcal{K}$; нам придётся ввести <u>временное</u> обозначение для *области определения* частичной функции $''r'' : \mathbf{X} \dashrightarrow \Bbbk$ – пусть это будет $\mathrm{Dom}(r) \subset \mathbf{X}$. Напомним, что

$$\mathrm{Dom}(r) = \{P \in \mathbf{X} \mid \mathrm{ord}_P(r) \geq 0\}.$$

Тогда, если $P \in \mathrm{Dom}(r)$, то $r \in \mathcal{O}_P$, и можно с помощью (*главного?*) изоморфизма в рамочке определить

$$''r''(P) := r \mod \mathfrak{m}_P.$$

Теперь можно интерпретировать введённые выше кольца (точнее, конечнопорождённые $\mathbb{k}$-алгебры) $\mathcal{O}(U)$ как кольца "функций", регулярных в открытых множествах $U \subseteq \mathbf{X}$, а локальные кольца $\mathcal{O}_P$ – как кольца *ростков* функций, определённых в *окрестностях* (вообще говоря, каждая в своей) точки P.

2.0.4. Дивизоры. В прежних обозначениях для каждой кривой введём свободную абелевы группу, порождённую точками:

$$\mathrm{Div}(\mathbf{X}) := \bigoplus_{P \in \mathbb{X}} \mathbb{Z}P.$$

Каждый элемент этой группы $D \in \mathrm{Div}$, то есть *дивизор*, записывается в виде

$$D = \sum_{P \in \mathbb{X}} v_P(D)P,$$

где $\mathbf{X} \mapsto \mathbb{Z} : P \mapsto v_P(D)$ – функция, почти всюду равная нулю.
Важная функция – *степень дивизора*

$$\deg : \mathrm{Div}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} : \sum_{P \in \mathbb{X}} n_P P \mapsto \sum_{P \in \mathbb{X}} n_P.$$

Важна группа дивизоров нулевой степени

$$\mathrm{Div}_0(\mathbf{X}) := \ker(\deg).$$

Теорема-определение. *Определён морфизм групп*

$$\mathrm{div} : \mathcal{K}^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathbf{X}) : r \mapsto \sum_{P \in \mathbb{X}} \mathrm{ord}_P(r)P.$$

Иначе говоря, у любой ненулевой рациональной функции на кривой лишь конечное число нулей и полюсов: $\forall r \in \mathcal{K}^\times \big[\#\{P \in \mathbf{X} \mid \mathrm{ord}_P(r) \neq 0\} < \infty\big]$. *Более того, количества нулей равны количествам полюсов, если те и другие подсчитывать с кратностями:*

$$\mathrm{div}(\mathcal{K}^\times) \subseteq \mathrm{Div}_0(\mathbf{X}).$$

Доказательство. См. **[Серр1968]** ■.

Исключительно важную роль в теории кривых играют *группы Пикара*

$$\mathrm{Pic}(\mathbf{X}) := \frac{\mathrm{Div}(\mathbf{X})}{\mathrm{div}(\mathcal{K}^\times)}$$

и

$$\mathrm{Pic}_0(\mathbf{X}) := \frac{\mathrm{Div}_0(\mathbf{X})}{\mathrm{div}(\mathcal{K}^\times)}.$$

Нетрудно понять, что в случае рациональной кривой $\mathbf{X}$, то есть $\mathbf{X} \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{k})$, то есть $\mathcal{K} \simeq \mathbb{k}(x)$, первая из этих групп изоморфна $\mathbb{Z}$, а вторая тривиальна (*любой дивизор нулевой степени на проективной прямой есть дивизор рациональной функции*). Мы увидим в дальнейшем, что верно и обратное: *из тривиальности группы* $\mathrm{Pic}_0(\mathbf{X})$ *следует рациональность кривой* $\mathbf{X}$.

2.0.5. Нормирование, определённое гладкой точкой. Мы составили некоторое предварительное представление о кривых, вложенных в проективные пространства (начав с кривых в проективной плоскости), и дали окончательное определение абстрактных кривых. Остаётся эти представления согласовать, связав нормирования функциональных полей с точками вложенных кривых. Нам придётся ограничиться гладкими точками, которые пока были определены только на примерах.

Гладкость точки – *локальное* свойство. Для нас это сейчас означает, что если $P \in \mathbf{X} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ – точка проективной кривой, то её гладкость достаточно проверить в какой-нибудь из аффинных карт, покрывающих $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ – тогда она будет гладка и в любой другой карте (маленькая лемма, предоставляемая читателю – после того, как появится определение). Поэтому достаточно определить гладкость точки аффинной кривой, а здесь вполне хватает определения из элементарного анализа: если $f \in \Bbbk[x, y]$, то условие гладкости точки $P \in \dot{\mathbf{X}} = \mathrm{zer}_f \subset \mathbf{A}_2(\Bbbk)$ состоит в том, что частные производные определяющего многочлена не обращаются в ней в 0 одновременно, $P \notin \left(\mathrm{zer}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \bigcap \mathrm{zer}_{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)$.

Пусть $P \in \dot{\mathbf{X}}$ – гладкая точка, и предположим для определённости, что касательная к ней не вертикальна, то есть $P \notin \mathrm{zer}_{\frac{\partial f}{\partial x}}$. В классическом анализе это означало бы, что y на нашей кривой – *неявная функция* x. В общем случае мы тоже постараемся "выразить всё, что можно" через x. Точнее, мы попытаемся сделать это для функций, регулярных в какой-либо окрестности выбранной точки P, то есть для элементов локального кольца $\mathcal{O}_P$.

Сделать это финитными алгебраическими средствами невозможно; но, как и в классическом анализе, на помощь приходят *степенные ряды* – если они не хотят сходиться (или если вопрос об их сходимости бессмыслен, как в нашем случае), то *формальные*.

Одно из определений гладкости точки P заключается в требовании того, чтобы идеал $\mathfrak{m}_P \triangleleft \mathcal{O}_P$ главным; такие локальные кольца называются *регулярными* (см. [**Serre2000**]), а любая образующая идеала $\mathfrak{m}_P = \langle u \rangle$ – *локальным параметром* в точке P, или *униформизующей*. В нашем предположении $P \notin \mathrm{zer}_{\frac{\partial f}{\partial x}}$ за локальный параметр можно взять

$$u = x - \big(x \mod \mathfrak{m}_P\big).$$

Тогда обычная процедура разложения функций в ряды определяет вложение регулярных функций в кольцо формальных степенных рядов

$$\mathcal{O}_P \hookrightarrow \Bbbk[[u]],$$

продолжающееся на поля частных и задающее вложение

$$\iota_P : \mathcal{K} \hookrightarrow \Bbbk((u))$$

глобального функционального поля в поле формальных рядов Лорана (см. [**Шафаревич2007**]). Это вложение и задаёт определяемое точкой $P \in \mathbf{X}$ нормирование

$$\mathrm{ord}_P : \mathcal{K}^\times \longrightarrow \mathbb{Z} : r \mapsto \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \iota_P(r) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u^i, \text{ причём } c_n \neq 0\}$$

(и, как всегда, $\mathrm{ord}_P(0) = \infty$). См. детали в [**Шафаревич2007**].

2.1. Некоторые алгебраические конструкции

2.1.0. Дифференцирования. Мы работаем с весьма общим алгебраическим понятием. Сначала введём *множество*

$$\mathrm{Diff}_{\Bbbk}\mathcal{K} := \{\partial : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K} \mid \partial(\Bbbk) = 0; \forall r, s \in \mathcal{K}$$

$$\partial(r+s) = \partial(r) + \partial(s)$$

$$\partial(rs) = r\partial(s) + s\partial(r)\}.$$

Дальше вместо $\partial(r)$ будем писать $\partial \cdot r$ (результат применени дифференцирования к функции...). И при случае называть дифференцирования *векторными полями.*

В анализе множеству векторных полей обычно приписывается структура векторного пространства над полем констант (классически $\mathbb{R}$). Мы снабдим это множество более богатой структурой.

Лемма 1. *Операция*

$$\mathcal{K} \times \mathrm{Diff}_{\Bbbk}\mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Diff}_{\Bbbk}\mathcal{K} : \Big((a, \partial) \mapsto \big(r \mapsto a(\partial \cdot r)\big)\Big)$$

определяет на множестве $\mathrm{Diff}_{\Bbbk}\mathcal{K}$ *структуру векторного пространства над полем* $\mathcal{K}$.■

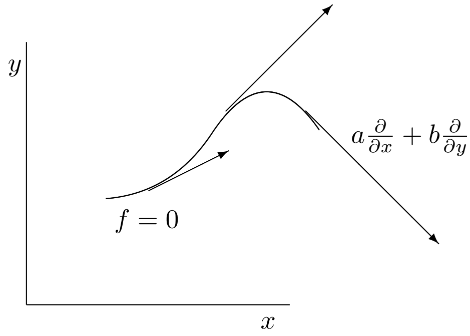
Лемма 2. *В случае плоской кривой* $\dot{\mathbf{X}} = \mathrm{zer}_f$ *при* $f \in \Bbbk[x, y]$ *любое дифференцирование* $\partial \in \mathrm{Diff}_{\Bbbk}\mathcal{K}$ *представимо (в очевидных обозначениях) в виде*

$$\partial = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$$

с некоторыми $a, b \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Положим $a = \partial \cdot x$ и $b = \partial \cdot y$. Тогда дифференцирование $\partial - a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y}$ обращает в ноль и x, и y – и, следовательно, любые рациональные выражения из них с "постоянными" коэффициентами. ■

С векторным полем на плоскости связан традиционный зрительный образ



Предложение. $\dim_{\mathcal{K}} \mathrm{Diff}_{\Bbbk}\mathcal{K} = 1$.

Доказательство. Согласно лемме 2 рассматриваемое пространство н более чем двумерно: $\mathrm{Diff}_{\Bbbk} \subseteq \mathcal{K}\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{K}\frac{\partial}{\partial a}$. Однако соотношение между образующими легко найти: при любых $a, b \in \mathcal{K}$ имеем

$$0 = (a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}) \cdot f = af_x + bf_y,$$

то есть достаточно взять любые a, b с заданным отношением $\frac{b}{a} = -\frac{f_x}{f_y}$.■

2.1.1. Дифференциалы. Определим пространство (рациональных) *дифференциалов* на кривой $\mathbf{X}$ как пространство, двойственное над $\mathcal{K}$ пространству дифференциалов[7]

$$\Omega^1(\mathbf{X}) := \big(\mathrm{Diff}_{\Bbbk}\mathcal{K}\big)^{\star}.$$

Определён *внешний дифференциал*

$$\mathrm{d} : \mathcal{K} \longrightarrow \Omega^1(\mathbf{X}) : x \mapsto \mathrm{d}x,$$

где

$$\mathrm{d}x : \mathrm{Diff}_{\Bbbk}\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K} : \partial \mapsto \partial \cdot x,$$

и из лемм предыдущего подраздела мгновенно следует, что любой элемент $\omega \in \Omega^1(\mathbf{X})$ представим в виде $\omega = a\mathrm{d}x$ при подходящих $a, x \in \mathcal{K}$; разумеется, это представление не однозначно.

Может оказаться, что для одномерных векторных пространств не может существовать содержательной алгебраической теории. Однако это впечатление ложно – см. [**Tate1968**]; впрочем, рассматриваемое пространство одномерно над $\mathcal{K}$, но бесконечномерно над $\Bbbk$.

Для дифференциалов, видимо, не существует таких же наглядных образов, как для дифференцирований в виде векторных полей. Однако они сыграли огромную роль в развитии математики: со времён Лейбница, введшего это понятие, был ясно, что *дифференциалы – это то, что мы интегрируем*; но несколько столетий потребовалось, чтобы прийти от исходного туманного образа *бесконечно малых приращений*[8] *к определению, которое мы только что ввели.* С

[7] Как ни странно, общепринятого обозначения для этого важнейшего объекта нет. В [**Cepp1968**] он обозначается $D_{\Bbbk}(\mathcal{K})$, а в [**Tate1968**] – $\Omega^1_{\mathcal{K}/\Bbbk}$. Мы выбрали обозначение, которое напоминает об аналогии $\Bbbk[x] \subset \Bbbk(x)$.

[8] эта концепция продолжает свою жизнь в XXI-м веке в учебниках анализа для инженеров

XVII века математики работают с *эллиптическими интегралами*, например, с
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}},$$
о котором нам лучше думать в терминах дифференциала $\omega = \frac{\mathrm{d}x}{y}$, определённого на кривой $\dot{\mathbf{X}}$, заданной уравнением $y^2 = x^3 + ax + b$. Понимание того, что эллиптические интегралы образуют принципиально новый класс функций, пришло вместе с осознанием алгебраического факта, который в наших обозначениях формулируется как $\omega \notin \mathrm{d}\mathcal{K}$.

2.2. Род (предварительно)

В нашем курсе будет считаться известным топологическое понятие рода кривой (половина 1-го числа Бетти) в случае $\Bbbk = \mathbb{C}$. С помощью понятий, введённых в настоящей лекции, можно несколькими способами определить род кривой над произвольным полем.

Например, можно для ненулевого дифференцирования $\partial \in \mathrm{Diff}_{\Bbbk}(\mathcal{K}) \setminus \{0\}$ определить его дивизор $\mathrm{div}(\partial)$, показать, что это чётное число не зависит от выбора ∂ и определить род g (модели поля $\mathcal{K}$) равенством
$$\deg\big(\mathrm{div}(\partial)\big) = 2 - 2g.$$
Всё это будет подробно проделано в последующих лекциях.

2.3. Множества $\mathcal{M}_g(\Bbbk)$

В предыдущей лекции было введено множество $\mathcal{M}(\Bbbk)$ классов изоморфности над $\Bbbk$ полей рассматриваемого класса. На самом деле, такое множество в математике не фигурирует; поля разбиваются по родам их моделей,
$$\boxed{\mathcal{M}(\Bbbk) =: \coprod_{g=0}^{\infty} \mathcal{M}_g(\Bbbk)}$$
Пространства модулей кривых рода g и являются основными предметами нашего курса. Аккуратно определив их как множества, мы перейдём к изучению имеющихся на них структур.

Список литературы

[GroDieu1960] Alexandre Grothendieck, Jean Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique, I-IV.* Hautes Études Sci. Publ. Math., 1960-1967.

[Newton1676] Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis.* The Mathematical Papers of Isaac Newton, Cambridge University Press, 2008.

[Serre2000] Jean-Pierre Serre, *Local algebra.* Springer-Verlag, 2000.

[Tate1968] John Tate, *Residues of differentials on curves.* Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 1, no 1 (1968), p. 149-159.

[Евклид1948] Евклид, *Начала.* Пер. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии М.Я. Выготского. В 3 т. (Серия «Классики естествознания»). М.: ГТТИ, 1948-50.

[Серр1968] Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов.* Перев. с франц. — М.: Мир, 1968.

[Шафаревич2007] И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.* МЦНМО, 2007.