Независимый Московский Университет, весна 2020

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ

Лекция 4 (была бы прочитана в марте-апреле, если бы не коронавирус): Кривые малых родов

В этой лекции мы начнём осваивать параллельно теорему Римана-Роха и её приложения к кривым малых родов

4.0. Диаграмма Римана-Роха **1**
...4.0.0. Пары (d, ℓ) **1**
...4.0.1. Случай рода 0 .... **1**
4.1. Случай рода 1 .... **3**
4.2. Дивизоры и линейные расслоения **4**
...4.2.0. Покрытия **4**
...4.2.1. Все дивизоры – локально главные **5**
...4.2.2. Коцикл, определённый дивизором **6**
...4.2.3. Линейное расслоение, определённое коциклом **6**

4.0. Диаграмма Римана-Роха

4.0.0. Пары (d, ℓ)**.** Сохраняем обозначения для объектов, которые будут в течение лекции фиксированы: $\Bbbk \subset \mathcal{K} = \Bbbk(\mathbf{X})$, причём $\mathbf{X}$– кривая рода g, являющегося главным параметром наших рассмотрений. Переменным будет дивизор $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$.

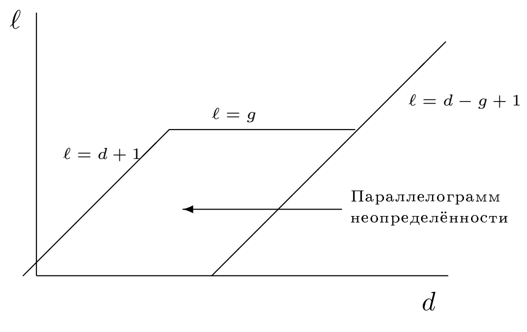
Нас интересуют пространства Римана-Роха

$$\mathrm{L}(D) := \{x \in \mathcal{K} \mid \mathrm{div}(x) + D \geq 0\}.$$

Заморозим буквы

$$d = \deg D, \;\; \ell = \dim_{\Bbbk} \mathrm{L}(D).$$

Диаграмма RR



указывает на возможные (при произвольных дивизорах D) пары (d, ℓ). Из диаграммы извлекается следующая предварительная формулировка теоремы Римана-Роха:

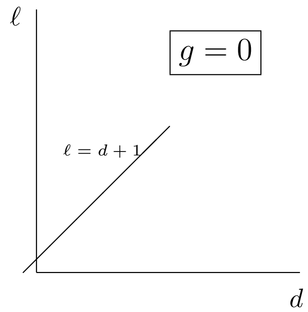
$$[\deg D \geq 2g] \Longrightarrow [\ell(D) = \deg D - g + 1]$$

или сокращённо

$$[d >> 0] \Longrightarrow [\ell = d - g + 1].$$

Преодоление неопределённости в параллелограмме потребует некоторых дополнительных усилий, но для малых родов и из предварительной формулировки можно извлечь существенную информацию.

4.0.1. Случай рода 0. Здесь неопределённости нет.



На графике есть точка $(d = 1, \ell = 2)$. Она говорит о том, что для любого дивизора степени 1 соответствующее пространство Римана-Роха двумерно – и, в частности, для произвольной точки, которую мы для очевидных ассоциаций обозначим $\underline{\infty} \in \mathbf{X}$

$$\ell(\underline{\infty}) = 2.$$

Но константы входят в пространство $\mathrm{L}(\underline{\infty})$, образуя 1-мерное подпространство $\Bbbk \subset \mathrm{L}(\underline{\infty})$, поэтому

$$\exists x \in \mathcal{K} \setminus \Bbbk, \left[\mathrm{L}(\underline{\infty}) = \langle 1, x \rangle\right].$$

Тогда для любого $r \in \mathcal{K}$ с дивизором

$$\mathrm{div}(r) = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$$

функция

$$s := \prod_{i=1}^{k} \left(x - x(P_i)\right)^{n_i}$$

имеет тот же дивизор, что r:

$$\mathrm{div(s)} = \mathrm{div(s)},$$

откуда $r \in \Bbbk^{\times} s$, и $r \in \Bbbk(x)$. Мы установили, что $\mathcal{K} = \Bbbk(x)$.

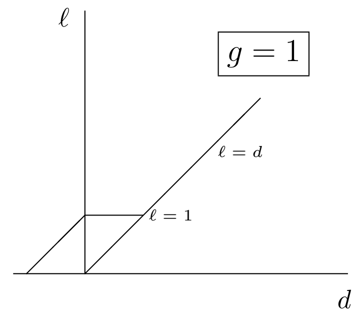
Итак, *нами полностью "расклассифицированы" кривые рода 0* – все они оказались изоморфны друг другу и проективной прямой $\mathbf{P}_1(\Bbbk)$. В наших основных обозначениях

$$\#\mathcal{M}_0 = 1.$$

При работе с высшими родами нам такие тривиальности больше не встретятся.

4.1. Случай рода 1

Теперь диаграмма RR имеет вид



Параллелограмм неопределённости появился: при $d = 0$ возможность $\ell = 1$ объясняется случаем $D = 0$ и равенством $\mathrm{L}(0) = \mathbb{k}$, тогда как возможность $\ell = 0$ – случаем $D = P - Q$, где $P, Q \in \mathbf{X}$, причём $P \neq Q$. В последнем случае $\mathrm{L}(P - Q) = \{0\}$, поскольку непостоянных функций с единственным полюсом на кривой рода 1 быть не может (иначе мы вернулись бы к случаю $g = 0$), а функция с дивизором $P - Q$ ещё и должна обращаться в ноль в точке Q.

Чтобы проанализировать алгебро-геометрическую природу кривой $\mathbf{X}$, снова выбираем произвольную точку $\underline{\infty} \in \mathbf{X}$.

Из диаграммы RR следует
$$\exists x \in \mathrm{L}(2\underline{\infty}) \setminus \mathbb{k}$$
и
$$\exists y \in \mathrm{L}(3\underline{\infty}) \setminus \mathrm{L}(2\underline{\infty}.)$$
Далее рассматриваем пространства $\mathrm{L}(k\underline{\infty})$ при $k = 1, \ldots, 5$, находя в них функции с последовательно возрастающими порядками полюсов в $\underline{\infty}$.
$$\mathrm{L}(\underline{\infty}) = \langle 1 \rangle;$$
$$\mathrm{L}(2\underline{\infty}) = \langle 1, x \rangle;$$
$$\mathrm{L}(3\underline{\infty}) = \langle 1, x, y \rangle;$$
$$\mathrm{L}(4\underline{\infty}) = \langle 1, x, y, x^2 \rangle;$$
$$\mathrm{L}(5\underline{\infty}) = \langle 1, x, y, x^2, xy \rangle;$$
На следующем шагу мы можем найти сразу две функции с полюсом очередного, 6-го порядка:
$$\mathrm{L}(6\underline{\infty}) = \langle 1, x, y, x^2, xy, \underline{x^3, y^2} \rangle.$$
Но согласно RR-диаграмме $\dim \mathrm{L}(6\underline{\infty}) = 6$, поэтому имеется нетривиальное соотношение
$$c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{30}x^3 + c_{02}y^2 = 0, \tag{$\bigstar$}$$
где $c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{30}, c_{02} \in \mathbb{k}$, причём $c_{30}c_{02} \neq 0$. Мы убедились, что кривая
$$\dot{\mathbf{X}} := \mathbf{X} \setminus \{\underline{\infty}\}$$

– плоская аффинная кубика. Она гладка, поскольку особая точка позволяла бы её рационально параметризовать, и род бы упал с 1 до 0.

Воспользовавшись диаграммой RR, мы пришли к следующему важному выводу: *любая кривая рода 1 изоморфна гладкой плоской кубике.*

Уравнение (★) позволяет нам составить некоторое первоначальное представление о множестве всех кривых рода 1 (разумеется, с точностью до изоморфизма). На 6-мерном множестве

$$\frac{\{(c_{00} : c_{10} : c_{01} : c_{20} : c_{11} : c_{30} : c_{02})\}}{\Bbbk^\times}$$

коэффициентов этого уравнения действует 5-мерная группа

$$x \mapsto Ax + By + C, \ y \mapsto Dy + E,$$

из чего мы можем сделать предварительный вывод о том, что

$$\dim_\Bbbk \mathcal{M}_1(\Bbbk) = 1.$$

Окончательно мы не можем сделать такой вывод хотя бы потому, что мы, напомним, пока не ввели на <u>множествах</u> $\mathcal{M}_g(\Bbbk)$ никакой структуры. В дальнейшем действительно окажется, что $\mathcal{M}_1(\Bbbk)$ естественно наделяется структурой кривой, причём с весьма интересными особенностями.

В дальнейшем возможность явно описывать пространства модулей $\mathcal{M}_g(\Bbbk)$ будет стремительно падать с ростом рода g.

4.2. Дивизоры и линейные расслоения

Начнём с неочевидных обозначений очевидных понятий.

4.2.0. Покрытия. Будем пользоваться обозначением

$$\mathcal{OP}_\mathbf{X} := \{\text{открытые подмножества } \subseteq \mathbf{X}\}$$

для любого топологического пространства $\mathbf{X}$, в том числе и для рассматриваемой сейчас кривой с топологией Зариского. Пока это для нас – частично упорядоченное (включением) множество, но вскоре будет обычным образом рассматриваться как *малая категория.*

Покрытием топологического пространства $\mathbf{X}$ называется пара (I, U), где I – множество, а U – отображение

$$U : I \longrightarrow \mathcal{OP}_\mathbf{X} : i \mapsto U_i,$$

причём, разумеется, требуется

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbf{X}.$$

Для наборов индексов $i, j, k, ... \in I$ мы будем пользоваться сокращениями $U_{ij} := U_i \bigcap U_j$, $U_{ijk} := U_i \bigcap U_j \bigcap U_k, \ldots$.

В основном мы будем иметь дело с *(би)компактными* топологическими пространствами, так что обычно будет предполагаться конечность $\#I < \infty$.

Мы будем рассматривать <u>класс</u>[1] покрытий топологического пространства $\mathbf{X}$ как <u>категорию</u>

$$\mathcal{COV}_{\mathbf{X}},$$

морфизмы *вписывания*, или *измельчения* покрытий $(I, U) \to (J.V)$ в которой определяются как отображения

$$\alpha : I \longrightarrow J, \text{ удовлетворяющие } \forall i \in I\big[U_i \subseteq V_{\alpha(i)}\big].$$

4.2.1. Все дивизоры – <u>локально</u> главные. Напомним, что любой дивизор $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$ имеет вид

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i,$$

где $n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in \mathbf{X}$. Выберем локальные параметры: пусть

$$\mathcal{O}_{P_i} \rhd \mathfrak{m}_{P_i} = \langle u_i \rangle$$

(мы воспользовались тем, что в наших локальных кольцах максимальные идеалы главные – это одно из определений гладкости кривой).

У каждого локального параметра u_i есть область определения $U_i \ni P_i$ – напомним, что $u_i \in \mathcal{O}(U_i)$, где $\mathcal{O}$ – *структурный пучок* (см. лекцию 2).

Выполнение условия $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = \mathbf{X}$ не гарантировано, нов случае его невыполнения мы можем добавить $U_0 := \mathbf{X} \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$; тогда, очевидно, $\bigcup_{i=0}^{k} U_i = \mathbf{X}$, и мы работаем с покрытием $\big(\{0, \dots, k\}, U\big) \in\in \mathcal{COV}_{\mathbf{X}}$. Мы сохраним свойство *быть покрытием*, если *измельчим* его немного, заменив все U_i на

$$U_i \setminus \Big(\{P_1, \dots, P_k\} \setminus \{P_i\}\Big);$$

тогда в каждой карте U_i будет лежать P_i и никаких других точек из носителя дивизора.

Далее для открытого множества $U \subseteq \mathbf{X}$ будет использоваться *ограничение* дивизора

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i P_i\Big)_{|U} := \sum_{P_i \in U}^{k} n_i P_i$$

В принятых предположениях дивизор $D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$ может быть "разложен" по картам U_i; в каждой карте он задаётся уравнением $u_i = 0$, а ограничение

$$D|_{U_i} = n_i P_i = \mathrm{div}(u_i^{n_i})|_{U_i}.$$

Это и означает, что каждый дивизор – локально главный.

В дальнейшем мы предъявим локальные аналоги пространств Римана-Роха и введём технику, позволяющую связать их с глобальными.

[1] покрытия не образуют множества, поскольку множества индексов, даже конечные, не контролируемы

4.2.1. Коцикл, определённый дивизором. Сохраним обозначения предыдущего подраздела, то есть

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i=0}^{k} U_i$$

–*покрытие*, в котором дивизор D является локально главным и локально имеет вид $\operatorname{div}(u_i^{n_i})$; напомним, что все $u_i \in \mathcal{O}(U_i)$. В нашем случае $I = \{0, \dots, k\}$, но это несущественно. В соответствии с историей построения следует положить $u_0 = 1$.

Для любых $i, j \in I$ на пересечении U_{ij} ни u_i, ни u_j в ноль не обращаются; это позволяет ввести

$$h_{ij} := \frac{u_i^{n_i}}{u_j^{n_j}} \in \mathcal{O}^{\times}(U_{ij}).$$

При всех $i, j, k \in I$ имеют место очевидные соотношения

$$h_{ii} \equiv 1$$

на U_i

$$h_{ij} h_{ji} \equiv 1$$

на U_{ij}

$$h_{ij} h_{jk} h_{ki} \equiv 1$$

на U_{ijk}

Согласно приводимому ниже общему определению, тем самым построен *коцикл*

$$h \in \mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}^{\times}; \mathfrak{U}) \subset \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{O}^{\times}(U_{ij}),$$

где через $\mathfrak{U}$ обозначено покрытие (I, U).

4.2.3. Линейное расслоение, определённое коциклом. Приводимая ниже конструкция имеет смысл в гораздо большей общности, чем та, с которой мы работаем, поэтому проведём её, не уточняя некоторые детали.

Итак, пусть дано покрытие $\mathfrak{U} = (I, U) \in\in \mathcal{COV}_{\mathbf{X}}$, то есть топологическое пространство $\mathbf{X}$ (возможно, снабжённое не уточняемыми сейчас структурами) представлено в виде объединения открытых множество

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Пусть, кроме того, дана коммутативная[2] группа G, действующая на коммутативной группе A; в нашем случае это мультипликативная группа $\Bbbk^{\times}$, действующая умножением на аддитивной групп $\Bbbk^{+}$ (так мы будем нетрадиционно обозначать аддитивную группу поля, чтобы подчеркнуть, что мы "забыли"

[2]излагаемая конструкция имеет смысл и для некоммутативных групп, но в соответствующих конструкциях надо следить за некоторыми порядками записи сомножителей, от чего мы для простоты пока воздерживается.

мультипликативную структуру).

Наконец, пусть дан коцикл

$$h \in \mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathfrak{U}),$$

понимаемый как набор для всех[3] $i, j \in I$ функций[4]

$$h_{ij} : U_{ij} \longrightarrow G,$$

удовлетворяющим соотношениям коциклов $h_{ii} = 1, h_{ij}h_{ji} = 1, h_{ij}h_{jk}h_{ki} = 1$ всюду, где они имеют смысл.

Перечисленные данные позволяют определить на множестве

$$\coprod_{i \in I} (U_i \times A)$$

отношение эквивалентности

$$\Big[(P_i, a_i) \approx_h (P_j, a_j)\Big] \Longleftrightarrow \Big[[P_i = P_j =: P] \wedge [a_i = h_{ij}(P) \cdot a_j]\Big]$$

и ввести фактор-множество

$$\mathbf{E}_h := \frac{\coprod_{i \in I} (U_i \times A)}{\approx_h}.$$

Оно снабжено проекцией

$$\mathbf{E}_h \longrightarrow \mathbf{X} : [(P, a)]_{\approx_h} \mapsto P,$$

слои которой <u>не</u>канонически изоморфны G-модулю A.

На следующей лекции будут разобраны примеры приведённой конструкции.

Список литературы

[**Serre1955**] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux Algébriques Cohérents.* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 61, No. 2 (Mar., 1955), pp. 197-278.

[**Серр1968**] Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов.* Перев. с франц. — М.: Мир, 1968.

---

[3] в нашем основном случае все открытые множества попарно пересекаются, и (кажущегося) затруднения с случаем $U_{ij} = \varnothing$ не возникает; однако когда при рассмотрении более классических топологий такая возможность возникает, полагаем $G^{\varnothing} = \{1\}$, и все дальнейшие конструкции проходят, не требуя дальнейших оговорок.

[4] в нашем основном классе примеров требуется отождествление сечений структурного пучка $h_{ij} \in \mathcal{O}^{\times}(U_{ij})$ с функциями $h_{ij} : U_{ij} \longrightarrow \Bbbk^{\times}$ с помощью обычных изоморфизмов $\frac{\mathcal{O}_P}{\mathfrak{m}_P} \cong \Bbbk$ для всех $P \in U_{ij}$.