Независимый Московский Университет, весна 2020

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ

Лекция 5: ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ (удалённая, 21 мая 2020): Пучки, когомологии и первые применения

В этой лекции мы сначала, частично следуя [**Huse1994**], разовьём общую теорию главных и индуцированных расслоений и введём *группу Пикара.*

5.0. Когомологическое множество $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$

5.0.0. Действующие лица. Повторим основную конструкцию. В большей, чем сейчас необходимо, общности она наглядней – и пригодится в будущем.

Сначала нам потребуются только топологическое пространство, в котором временно фиксировано покрытие $\mathcal{I} = (I, U)$

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$$

и не обязательно коммутативная группа

$$G.$$

Про структуры и на пространстве, и на группе думать пока не будем – подразумевая, однако, что функции $V \to G$, которые мы будем рассматривать для открытых множеств $V \in\in \mathcal{OP}_{\mathbf{X}}$, уважают эти структуры.

5.0.1. Множество коциклов $\mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$**.** В отличие от основного для нас случая коммутативной группы G, коциклы образуют не группу, а *множество с отмеченной точкой*

$$\mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I}) :=$$

$$:= \left\{ h \in \prod_{(i,j)\in I\times I : U_{ij}\neq\varnothing} G^{U_{ij}} \middle| \forall i,j,k \in I \Big[\big[h_{ii} \equiv 1\big] \wedge \big[h_{ij}h_{ji} \equiv 1\big] \wedge \big[h_{ij}h_{jk}h_{ki}|_{U_{ijk}} \equiv 1\big] \Big] \right\}$$

(отмечен набор $h_{ij} \equiv 1$).

В нашем основном случае $\mathbf{X}$ – проективная кривая над $\Bbbk$, покрытие $\mathcal{I}$ состоит из аффинных кривых, группа $G = \Bbbk^\times$, а функции $h_{ij} \in \mathcal{O}^\times$ регулярны.

Это множество необозримо, но нас интересует не оно само, а его фактор по действию группы, которое мы сейчас определим.

Один нюанс в приведённом определении. В нашем основном случае он несуществен, поскольку все наши тройные пересечения непусты, но в общем определении может возникнуть ощущение, что при формулировке требования $h_{ij}h_{jk}h_{ki}|_{U_{ijk}} \equiv 1$ следует наложить ограничение $U_{ijk} \neq \varnothing$. Однако я полагаю это излишним: 1 в правой части обсуждаемого равенства является элементом группы $G^{U_{ijk}}$, в случае пустого множества $V \in\in \mathcal{OP}_{\mathbf{X}}$ из общекатегорных соображений следует считать G^V тривиальной, то есть одноэлементной, группой. Иначе говоря, *в случае $U_{ijk} = \varnothing$ соотношение $h_{ij}h_{jk}h_{ki}|_{U_{ijk}} \equiv 1$ не накладывает ограничений на набор h_{ij}.*

5.0.2. Группа $G^{\mathcal{I}}$ и её действие на $\mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$. Определим

$$G^{\mathcal{I}} := \prod_{i\in I} \mathcal{O}(U_i).$$

Действие этой группы на множестве коциклов определяется формулой

$$G^{\mathcal{I}} \times \mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I}) \longrightarrow \mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I}) : (g, h) \mapsto g \cdot h,$$

где

$$(g \cdot h)_{ij} := g_i h_{ij} g_j^{-1}.$$

Читателю предоставляется проверить, что это – действительно действие.

5.0.3. Когомологическое множество $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$. В некоммутативной версии кограницы явно не фигурируют, а по определению

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I}) := \frac{\mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})}{G^{\mathcal{I}}}.$$

Разумеется, класс выделенного элемента соответствует коциклам $h_{ij} = g_i g_j^{-1}$, и можно даже определить соответствующий аналог кограничного оператора $G^{\mathcal{I}} \to \mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$, но сходство с коммутативным случаем иллюзорно.

Приведённое определение вряд ли позволяет вычислить обуждаемые когомологические множетва, в том числе в интересующем нас случае $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}^\times)$. Одна из ближайших целей – развить и понятия, позволяющие перейти от определений к вычислениям.

5.1. Главные расслоения

5.1.0. Торсоры. Иначе – *главные однородные* пространства. Неформально G - торсор – эта группа G, которая "забыла" свой нейтральный элемент. Типичный пример – аффинное пространство без выделенного "начала" (координат); на аффинном пространстве, однако, сохраняется действие векторного (сдвигами), и определена *разность* точек аффинного, являющихся вектором. Подробное обсуждение см. в [**Baez**].

Мы примем нестандартное обозначение. Для группы $G \in\in \mathcal{GRP}$ обозначим

$$\underline{G} := \mathbf{forget}_{\mathcal{SET}}^{\mathcal{GRP}}(G) \in\in \mathcal{SET}$$

– то же множество, но без групповой структуры. От структуры сохраняется *действие*

$$G \times \underline{G} \longrightarrow \underline{G} : (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

Мы его реализуем в виде "обратной" операции (*вычитания* в случае аффинных и векторных пространств)

$$\underline{G} \times \underline{G} \longrightarrow G : (x, y) \mapsto x : y.$$

Эта операция однозначно определяется тождеством

$$\boxed{\boxed{(x : y) \cdot y \equiv x}}$$

$(x : y)$ – то
(единственное) преобразование,
которое переводит y в x

5.1.1. Главное определение. Для группы G *главное G-расслоение* определяется (снова в подходящей категории) как объект, снабжённый *свободным* действием группы G.

Пусть дано такое действие на объекте[1] $\mathbf{E}$

$$G \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$$

– часто именно этот морфизм называется *расслоением*; фактор по нему обозначим $\mathbf{X} := \frac{\mathbf{E}}{G}$, а морфизм факторизации –

$$\pi : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{X};$$

пара $(\mathbf{E}, \pi)$ называется главным G-расслоением <u>над</u> $\mathbf{X}$.

Главные G-расслоения на данной базой не образуют множества, нам придётся (ненадолго) ввести категорию

$$\mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G) := \{\{\text{главные } G - \text{расслоения над } \mathbf{X}\}\},$$

морфизмы в которой определяются эквивариантными отображениями

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{PRIN}(\mathbf{X},G)}\big(((\mathbf{E}, \pi)), (\mathbf{E}', \pi')\big) := \{\varphi : \mathbf{E} \to \mathbf{E}' \mid \forall g \in G, P \in \mathbf{E}\big[\varphi(g{\cdot}P) = g{\cdot}\varphi(P)\big]\},$$

причём диаграмма

[1] обозначение традиционно: теория расслоённых пространств строилась после 2й мировой войны в основном во Франции, и использовалось французское слово **E***space*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbf{E}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathbf{X} & \end{tikzcd}$$

предполагается коммутативной, $\pi' \circ \varphi = \pi$.

Очевидно, введённая категория –*группоид*: все морфизиы в ней обратимы.

Для любых $\mathbf{X}$, G *тривиальное* G-расслоение над $\mathbf{X}$ – это прямое произведение $\mathbf{E} = \mathbf{X} \times \underline{G}$ с очевидным действием $G \times \mathbf{E} \to \mathbf{E} : \big(g, (P, x)\big) \mapsto (P, g \cdot x)$ и проекцией $\pi : \mathbf{X} \times \underline{G} \to \mathbf{X} : (P, x) \to P$. Расслоения, *изоморфные* (в категории $\mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G)\big)$ тривиальному расслоению, также называются *тривиальными*.

Лемма *Главное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда допускает сечение, то есть морфизм* $\sigma : \mathbf{X} \to \mathbf{E}$, *удовлетворяющий* $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{X}}$.

Доказательство. Действительно, при наличии такого сечения строится изоморфизм

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{X} \times G : e \mapsto \Big(\pi(e), e : \big(\sigma \circ \pi(e)\big)\Big).$$

Наоборот, тривиальное расслоение допускает сечение

$$\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X} \times G : P \mapsto (P, 1_G). \blacksquare$$

Для любого объекта $(\mathbf{E}, \pi) \in\in \mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G)$ и для произвольного подмножества $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ определено *ограничение* $\mathbf{E}\big|_{\mathbf{Y}} := \pi^{-1\circ}(\mathbf{Y})$ с "тем же" действием группы G. Это – функтор $\mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G) \to\to \mathcal{PRIN}(\mathbf{Y}, G)$; мы будем рассматривать его лишь для открытых подмножеств $\mathbf{Y} \in \mathcal{OP}_{\mathbf{X}}$.

Очевидно понятие *локально-тривиального* (главного) расслоения; при очень широких предположениях (которые быдут выполнены во всех наших рассмотрениях) *любое главное расслоение локально-тривиально.* Часто локальная тривиальность включается в определение расслоений.

Для любого покрытия $\mathcal{I} = (I, U) \in\in \mathcal{COV}(\mathbf{X})$ определим полную подкатегорию

$$\mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G; \mathcal{I}) \subseteq\subseteq \mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G),$$

объекты который тривиализуемы над открытыми множествами $U_i \subseteq \mathbf{X}$ при всех $i \in I$. Из локальной тривиальности (рассматриваемых нами) расслоений вытекает, что *любое расслоение тривиализуется в достаточно мелком покрытии.*

И категория $\mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G)$, и её подкатегории $\mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$ относятся к классу *по существу малых*[2]: хотя сами объекты и не образуют множеств, *классы изоморфности* образуют. Будем при необходимости называть эти классы эквивалентности *каталогами* соответствующих категорий и обозначать их

$$\mathbf{PRIN}(\mathbf{X}, G) \text{ и } \mathbf{PRIN}(\mathbf{X}, G; \mathcal{I}).$$

[2]термин, предложенный П. Делинем: *essentially small*

5.1.2. Классификация главных расслоений. Сохраняем обозначения предыдущего подраздела.

Теорема. *Имеет место биекция*
$$\mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G; \mathcal{I}) \cong \mathrm{H}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I}).$$

Доказательство. Для данного главного расслоения $(\mathbf{E}, \pi) \in\in \mathcal{PRIN}(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$ для всех $i \in I$ имеются "вертикальные" изоморфизмы
$$v_i : \pi^{-1\circ} U_i \xrightarrow{\simeq} (U_i \times G),$$
перестановочные с проекциями, то есть удовлетворяющие для всех $i \in I$ равенствам
$$\mathrm{pr}_{U_i} \circ v_i = \pi\big|_{\pi^{-1\circ} U_i},$$
где $\mathrm{pr}_{U_i} : U_i \times G \to U_i : (P, g) \mapsto P$. С помощью этих конструкций вводятся *тривиализующие сечения*
$$\sigma_i : U_i \longrightarrow \mathbf{E} : P \mapsto v_i^{-1\circ}(P, 1_G),$$
очевидно, удовлетворяющие равенствам $\pi \circ \sigma_i = \mathrm{id}_{U_i}$. Наконец, вводятся функции
$$h_{ij} := (\sigma_j : \sigma_i) : U_{ij} \longrightarrow G,$$
и легко проверить, что они образуют коцикл.

Произвол в приведённой конструкции связан с выбором тривиализующих сечений $\sigma_i : U_i \to \mathbf{E}$, превращаемым вертикальными изоморфизмами в набор $e_i = v_i \circ \sigma_i : U_i \to G$. Изоморфное расслоение дало бы набор $\hat{\sigma}_i : U_i \to \hat{\mathbf{E}}$ и с помощью вертикальных изоморфизмов в $\hat{e}_i = \hat{v}_i \circ \hat{\sigma}_i : U_i \to G$, который был бы связан с исходным соотношениями $\hat{e}_i = g_i e_i$, где $g_i : U_i \to G$ – некоторые функции (рассматриваемого класса). Тогда оказывается в очевидных обозначениях, что
$$\hat{h}_{ij} = g_i h_{ij} g_j^{-1},$$
то есть коциклы $h, \hat{h} \in \mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$ лежат в одной $G^{\mathcal{I}}$-орбите и, следовательно, корректно определяют конструируемый по расслоению элемент из $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$.

Наоборот, пусть задан произвольный коцикл $h \in \mathrm{Z}^1(\mathbf{X}, G; \mathcal{I})$. Построим по нему главное расслоение, которое обозначим
$$\mathbf{X} \times_h \underline{G} := \frac{\coprod_{i \in I} (U_i \times \underline{G})}{\approx_h},$$
где отношение эквивалентности $\approx_h$ определяется с помощью тавтологических вложений[3]
$$\mathfrak{o}_i : U_i \hookrightarrow \mathbf{X} :$$
по определению, для $(P_i, g_i) \in (U_i \times \underline{G})$ и $(P_j, g_j) \in (U_j \times \underline{G})$
$$(P_i, g_i) \approx_h (P_j, g_j) :\Longleftrightarrow \Big[[\mathfrak{o}_i(P_i) = \mathfrak{o}_j(P_j) =: P] \wedge [g_i = h_{ij}(P) g_j] \Big]$$

[3]Обозначение нестандартно. Готическая буква $\mathfrak{o}$ – от словосочетания $\mathfrak{o}$*pen subset*.

Читателю предоставляется подробная проверка того, то отношение $\approx_h$ действительно является отношением эквивалентности и что приведённые конструкции взаимно обратны. ■

Полезно также рассмотреть три варианта приведённого определения: на коцикл можно умножать и слева, и справа, а индексы можно переставлять.

Во всех важных случаях от привязки к покрытию удаётся избавиться, переходя к соответствующим образом определённому пределу по измельчающимся покрытиям; см. [**Huse1994**].

5.2. Индуцированные расслоения.

5.2.0. Конструкция. Теперь рассмотрим новую структуру; действие α группы G на объекте A

$$G \times A \longrightarrow A : (g, a) \mapsto g \cdot_\alpha a.$$

Это позволяет ввести *индуцированное расслоение*

$$\mathbf{X} \times_{h,\alpha} A := \frac{\coprod_{i\in I} (U_i \times A)}{,} \approx_{h,\alpha}$$

где при заданном коцикле отношение эквивалентности $\approx_{h,\alpha}$ определяется формулой

$$\boxed{(P, a)_i = \big(P, h_{ij}(P) \cdot_\alpha a\big)_j}$$

Оставшиеся формулировки и проверки предоставляются читателю.

5.2.1. Примеры. От произвольных топологических пространств перейдём к *многообразиям* $\mathbf{X}$, причём этот термин может пониматься широко. Чтобы не возиться с индексами, ограничимся сегодня случаем

$$\dim \mathbf{X} = 1.$$

Когда общепринятые обозначения не выработаны, наши будут до некоторой степени случайны. Подразумевается, как обычно, покрытие $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ и система *локальных параметров* $u_i \in \mathcal{O}(U_i)$.

<u>Касательное расслоение</u>. Сечение в традиционных обозначениях: $V|_{U_i} = V_i \frac{\partial}{\partial u_i}$.

$$\left[V_i \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{U_{ij}} = V_j \frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_{U_{ij}} \right] \Longleftrightarrow \left[V_i = \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial u_j}} V_j \right]$$

<u>Кокасательное расслоение</u>. Сечение в традиционных обозначениях: $\omega|_{U_i} = f_i \mathrm{d}u_i$.

$$\left[f_i \mathrm{d}u_i\Big|_{U_{ij}} = f_j \mathrm{d}u_j\Big|_{U_{ij}} \right] \Longleftrightarrow \left[f_i = \boxed{\frac{\partial u_j}{\partial u_i}} f_j \right]$$

Вложение кривой в проективное пространство. В стандартных координатах объемлющего пространства
$$h_{ij} = \frac{x_i}{x_j}.$$
Этот пример будет играть центральную роль в геометрии проективных кривых.

5.3. Пучки сечений

5.3.0. Расслоения над проективными пространствами. В нашем основном случае
$$G = \Bbbk^\times.$$
О ней надо думать как о СВОБОДНО действующей на проколотом пространстве
$$\mathbf{E} = \Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}.$$
База этого расслоения – то самое проективное пространство
$$\mathbf{P}_n(\Bbbk) = \frac{\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}}{\Bbbk^\times},$$
в котором мы в основном работаем. Само расслоение называется *тавтологическим.* Как мы через некоторое время узнаем, все линейные расслоения над $\mathbf{P}_n(\Bbbk)$ –*степени тавтологического.*

Все расслоения над вложенными в проективные пространства кривыми (а также над многообразиями бо́льших размерностей)
$$\mathbf{X} \hookrightarrow \mathbf{P}_n(\Bbbk)$$
– *ограничения* этих. В частности, это верно для линейных расслоений L_D, построенных, как выше, по дивизорам $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$.

5.3.1. Линейные расслоения и дивизоры. Итак, линейные расслоения на проективных кривых задаются функциями перехода и являются ограничениями тавтологического расслоения над объемлющим проективным пространством. Как же в случае расслоения L_D восстановить дивизор D?

Правильная версия этого вопроса – о восстановлении не дивизора, а *класса его линейной эквивалентности.* И ответ здесь мгновенно следует из определений:

Класс линейной эквивалентности обильного дивизора совпадает с классом гиперплоского сечения кривой в проективном пространстве при вложении, определённом этим дивизором.

5.3.2. От расслоений к пучкам. Ограничимся векторными расслоениями, то есть в наших обозначениях случаем $G \subseteq \mathsf{GL}_n(\Bbbk)$ и $\alpha : G \to \mathrm{Aut}_\Bbbk(V)$ – линейное представление.

Каждому такому расслоению ставится в соответствие *(пред)пучок его сечений.* В такой общности мы обозначений не фиксируем.

Что же касается нашего основного примера расслоений $\mathrm{L}_D \to \mathbf{X}$ при $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$, то пучок $\mathcal{L}_D$ сопоставляет каждому открытому $U \in \mathrm{OP}(\mathbf{X})$ абелеву группу (и даже $\mathcal{O}(U)$-модуль)

$$\mathcal{L}_D(U) := \{\text{сечения } \mathcal{L}_D\big|_U\}.$$

5.3.3. $\mathrm{L}_D, \mathcal{L}_D, \mathrm{L}(D)$**.** Мы сопоставили каждому $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$ три указанных объекта со схожими обозначениями. Они определялись с помощью некоторого количества произвольных выборов. Можно убедиться, однако, что их классы изоморфности от этих выборов не зависят.

Список литературы

[**Baez**] John Baez, *Torsors made easy.* Web.
[**Huse1994**] Dale Husemoller, *Fibre Bundles.* 1994 Springer-Verlag New York, Inc.