Независимый Московский Университет, весна 2020

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ

Задачи

К лекции 1

1.1. Возможна ли четвёрка полей $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \mathcal{K}_3 \supset \Bbbk$, в которой степень трансцендентности $\mathcal{K}_1$ над $\Bbbk$ равна 1, но никакие расширения соседних полей не являются конечными?

1.2. Пусть $\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$ – конечное расширение полей, и пусть $v \in \mathrm{Val}(\mathbb{K})$ – нормирование. Покажите, что ограничение $v|_{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \to \big(\mathbb{Z} \coprod \{\infty\}\big)$ удовлетворяет всем аксиомам нормирования, кроме, возможно, сюръективности. Опишите все нормирования поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

1.3. По аналогии с предыдущей задачей опишите все нормирования над основным полем $\Bbbk$ полей $\Bbbk(x, \sqrt{1-x^2})$ и $\Bbbk(x, \sqrt{1-x^3})$. Проверьте первый из ответов с помощью рациональной параметризации окружности.

1.4. (Задача из учебника И.Р. Шафаревича). Пусть *декартов лист*, заданный уравнением $y^2 = x^3 + x^2$, рассматривается над $\mathbb{R}$. Вычислите площадь его петли.

1.5. Выразите длину эллипса через табличные эллиптические интегралы. Изучите полученные формулы при эксцентриситете эллипса, стремящемся к нулю.

1.6. Найдите в каком-либо справочнике определения эллиптических деформаций (Якоби-Гудермана) тригонометрический функций $z \mapsto \mathsf{cn}z, \mathsf{sn}z, \mathsf{dn}z$. Не обязательно вникая в аналитическую суть этих определений, сочтите их свойства мотивирующими рассмотрение в трёхмерном аффинном пространстве координатами $(\mathsf{c}, \mathsf{s}, \mathsf{d})$ пересечение двух квадрик

$$\begin{cases} \mathsf{c}^2 + \mathsf{s}^2 = 1 \\ \mathsf{d}^2 + \kappa^2\mathsf{s}^2 = 1 \end{cases}$$

(κ – параметр). С помощью подходящего бирационального преобразования переведите эту эллиптическую кривую в эллиптическую кривую *в форме Вейерштрасса*, заданную уравнением $y^2 = x^3 + ax + b$ с параметрами a, b. Следите за *тригонометрическим* случаем $\kappa = 0, \mathsf{dn} \equiv 1$.

К лекции 2

2.1. Считая, что слово *треугольник* означает объединение трёх прямых в проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем (например, $\mathbb{C}$), предложите определения *вписанной* и *описанной* окружностей. Изучите их пересечение; всегда ли оно состоит из 4-х точек?

Следующие три задачи имеют смысл над произвольным полем $\Bbbk$, но для осторожности можно предположить, что $\Bbbk = \mathbb{C}$.

2.2. Пусть аффинная окружность $\ddot{\mathbf{X}}$ задана уравнением $x^2 + y^2 = 1$, точка $P \in \ddot{\mathbf{X}}$ определена условиями $x(P) = 0, y(P) = 1$.

(а) Докажите, что x – локальный параметр в точке P.

(б) Проверьте, что $y \in \mathcal{O}_P$ и вычислите образ y при вложении $\mathcal{O}_P \hookrightarrow \Bbbk[[x]]$.

(в) Вычислите образ $\frac{1}{y}$ при вложении $\mathcal{O}_P \hookrightarrow \Bbbk((x))$.

(г) Проанализируйте своё решение: какие свойства поля $\Bbbk$ использовались?

2.3. Проделайте то же, что в предыдущей задаче, для кривой $y^2 = 1 - x^3$.

2.4. Проделайте то же, что в предыдущих двух задачах, для *кубики Ферма* $x^3 + y^3 = 1$.

2.5*. Предложите определение дивизора $\operatorname{div}(\partial)$ ненулевого дифференцирования $\partial \in \operatorname{Diff}_{\Bbbk}(\mathcal{K})$. В случае $\mathbf{X} = \mathbf{P}_1(\Bbbk)$ вычислите $\operatorname{div}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)$

2.6*. Предложите определение дивизора $\operatorname{div}(\omega)$ ненулевого дифференциала $\omega \in \Omega^1(\mathbf{X})$. В случае $\mathbf{X} = \mathbf{P}_1(\Bbbk)$ вычислите $\operatorname{div}(\mathrm{d}x)$.

2.7*. Пусть $\mathbf{X}$ – гладкая проективная кубика с аффинным уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

и на ней рассматривается дифференциал $\omega := \frac{\mathrm{d}x}{y}$. Вычислите $\operatorname{div}(\omega)$.

2.8*. В обозначениях предыдущей задачи рассмотрите отображение

$$\partial := \frac{\mathrm{d}}{\omega} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K} : r \mapsto \frac{\mathrm{d}r}{\omega}$$

и докажите, что это – дифференцирование. Вычислите $\operatorname{div}(\partial)$.

К лекции 3

3.1. Приведите пример таких $D \in \operatorname{Div}(\mathbf{X})$ и $x, y \in \mathrm{L}(D)$, что $\langle x, y\rangle \neq \mathrm{L}(D)$.

3.2. На кривой $\mathbf{X}$ рассмотрим простейший дивизор $D = P$, где $P \in \mathbf{X}$ – произвольная точка. Докажите, что, если $\mathbf{X}$ – плоская неприводимая коника, то $\ell(D) = 1$.

3.3. В обозначениях предыдущей задачи докажите, что, если $\mathbf{X}$ – плоская неприводимая кубика, то $\ell(D) = 0$.

3.4. Пусть $\mathbf{X}$ – проективное замыкание пересечения двух аффинных квадрик из задачи 1.6, но (без апелляции к эллиптическим функциям и) в более традиционных обозначениях

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + k^2 y^2 = 1, \end{cases}$$

где k – "общий" параметр. Вложите $\Bbbk$-линейные пространства $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$, $\langle x,y\rangle$, $\langle y,z\rangle$, $\langle x,y,z\rangle$ и т. п. в подходящее пространство Римана-Роха $\mathrm{L}(D)$. Какие ограничения на k использовались?

3.5. Пусть P,Q,R – разные точки на гладкой проективной кубике $\mathbf{X}$. Покажите, что существует такая $Z\in\mathbf{X}$, что $P+Q-R\equiv Z$.

3.6. Пусть x – стандартная координата на проективной прямой. Рассмотрим

$$(1:x:x^2:x^3):\mathbf{P}_1(\Bbbk)\longrightarrow\mathbf{P}_3(\Bbbk).$$

Докажите, то образ этого отображения не лежит ни в какой проективной плоскости.

К лекции 4

В нижеследующих задачах для дивизора $D\in\mathrm{Div}(\mathbf{X})$ и базиса пространства Римана-Роха $\mathrm{L}(D)=\langle x_0,\dots,x_n\rangle$ используется (нестандартное) обозначение

$$\iota_D:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{P}_n\big(\Bbbk\big):P\mapsto\big(x_0(P):\cdots:x_n(P)\big).$$

Это отображение зависит от базиса, но лишь с точностью до проективной эквивалентности.

4.1. (Продолжение задачи 3.6 о *рациональной нормальной кривой*). Рассмотрите случай $\mathbf{X}=\mathbf{P}_1(\Bbbk)$ и $D=3\underline{\infty}$. Выбрав в $\mathrm{L}(D)$ стандартный базис $\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$, а в $\mathbf{P}_3(\Bbbk)$ координаты $(x_0:x_1:x_2:x_3)$ так, чтобы имело место тождествл $(x_0:x_1:x_2:x_3)\equiv(1:x:x^2:x^3)$, убедитесь в том, что образ $\iota_D(\mathbf{X})$ лежит в пересечении двух квадрик с уравнениями $x_0x_2=x_1x_3$ и $x_0x_3=x_1x_2$. совпадает ли этот образ с пересечением указанных квадрик? <u>Совет</u>. Рассмотрите *степень* кривой $\iota_D(\mathbf{X})$.

4.2. По-прежнему для $\mathbf{X}=\mathbf{P}_1(\Bbbk)$ постройте погружение $\iota:\mathbf{X}\to\mathbf{P}_1(\Bbbk)$, образ которого в аффинной карте, то есть $\iota(\mathbf{X})\bigcap\mathbf{A}_2(\Bbbk)$, в подходящих координатах совпал бы с *декартовым листом*, задаваемым, напомним, уравнением $y^2=x^3+x^2$. Найдётся ли такой дивизор $D\in\mathrm{Div}(\mathbf{X})$, что $\iota=\iota_D$?

4.3. Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, с заменой декартова листа на *полукубическую параболу*, задаваемую, напомним, уравнением $y^2=x^3$.

4.4. Рассмотрите полученное в лекции уравнение плоской кубики

$$c_{00}+c_{10}x+c_{01}y+c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{30}x^3+c_{02}y^2=0.$$

Докажите, что, если $c_{30}c_{02}=0$, то кривая, задаваемая этим уравнением, рациональна.

4.5. Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите, что любую кривую рода 1 можно задать аффинным уравнением вида

$$y^2+b_{11}xy+b_{01}y=x^3+b_{20}x^2+b_{10}x+b_{00}.$$

<u>Совет</u>. Воспользуйтесь подходящим преобразованием $y=y'+\mu x$.

4.6. Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите, что в предположении $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ любую кривую рода 1 можно задать аффинным уравнением вида
$$y^2 + a_{01}y = x^3 + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00}.$$

4.7. Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите, что при некоторых ограничениях на основное поле любую кривую рода 1 можно задать аффинным уравнением в так называемой *вейерштрассовой форме*
$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$
В чём заключаются упомянутые ограничения?

4.8*. Пусть $\mathbf{X}$ – произвольная кривая рода 1. Найдите на ней такой дивизор $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$, что $\iota_D(\mathbf{X})$ лежит в пересечении двух квадрик в $\mathbf{P}_3(\Bbbk)$. Совет (для знакомых с эллиптическими функциями). Воспользуйтесь *гудермановскими* функциями $\mathsf{cn}, \mathsf{sn}, \mathsf{dn}$.

К лекции 5

5.1. Постройте *лист Мёбиуса* как расслоение над окружностью.

5.2. Рассмотрим в качестве пространства $\mathbf{E}$ главного расслоения сферу $\mathbf{S}^3$, реализованную как группу кватернионов[1] единичной нормы
$$\mathbf{E} = \mathbf{S}^3 = \mathbb{H}_1^\times := \{z + w\mathrm{j} \mid z, w \in \mathbb{C}, z\overline{z} + w\overline{w} = 1\}.$$
Пусть группа $G = \mathbb{C}_1^\times := \{g \in \mathbb{C} \mid g\overline{g} = 1\}$ действует на $\mathbf{E}$ умножением слева:
$$g \cdot (z + w\mathrm{j}) := gz + gw\mathrm{j}.$$
Опишите фактор $\mathbf{X} := \frac{\mathbf{E}}{G}$ (это – сфера $\mathbf{S}^2$, или, лучше сказать, проективная прямая $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$) и отображение факторизации $\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{X}$ (это – *расслоение Хопфа*). Тривиализуйте его в стандартном покрытии проективной прямой двумя аффинными картами. Укажите коцикл, соответствующий построенному расслоению. Тривиален ли он?

5.3*. То же, что в предыдущей задаче, с заменой тотального пространства $\mathbf{S}^3$ на $\mathbf{S}^7$, группы $G = \mathbb{C}_1^\times$ на $G = \mathbb{H}_1^\times$, а кватернионов – на *октонионы*.

5.4. Опишите касательное расслоение к двумерной сфере.

---

[1]здесь подразумевается реализация тела кватернионов в виде $\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}\mathrm{j}$ с умножением $(z_1 + w_1\mathrm{j})(z_2 + w_2\mathrm{j}) := z_1z_2 - w_1\overline{w_2} + (z_1w_2 + w_1\overline{z_2})\mathrm{j}$