0 Напоминание

- k поле, $\mathrm{char}(k)=0$
- $\mathcal{C}$ к-ия Таннаки$/k$; $\omega: \mathcal{C} \to Vect(k)$
- $G_\omega = I(\omega,\omega) = \underline{Isom}^{\otimes}(\omega,\omega)$

<u>Утв.</u> G_ω проунипот. $\Leftrightarrow$ $\forall\, S \in \mathcal{C}$ явл-ся последовательным расш-м $\mathbb{1}$ с сам. собой.

<u>Утв.</u> Если при этом $Ext^2_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\mathbb{1})=0$, $V = Ext^1_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\mathbb{1})$, то $G_\omega = Spec(T(V))$ (неканонически), т.е. G_ω – проунипот. пополн-ие своб. группы на $\dim_k(V)$ образующих.

Пусть $\forall\, S \in \mathcal{C}$ определена $W_\bullet S$ в $\mathcal{C}$ т.ч.:

- $W_\bullet$ точная ($\Leftrightarrow$ $gr^W_\bullet$ точный ф-р $\Leftrightarrow$ все м-мы в $\mathcal{C}$ строгие отн-но $W_\bullet$)
- $W_\bullet$ уваж. $\otimes$
- $W_\bullet$ функтор. по S
- $\exists\, L \in \mathcal{C}$ ранга 1 (т.е. $\dim_k \omega(L)=1$ $\Leftrightarrow$ $L \otimes L^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, M \in \mathcal{C}$ т.ч. $L \otimes M \cong \mathbb{1}$)

т.ч. $\forall\, S$ $\quad gr^W_n S \simeq \left(L^{\otimes(-n)}\right)^{\oplus r}$

(т.е. L имеет вес -1) $\boxed{L^{-1} = L^\vee}$

<u>Пример</u> $\mathcal{C} = MTH(\mathbb{Z})$, $k = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(1)_H$, $W_\bullet = W$.

Замеч. • $\omega: \mathcal{C} \longrightarrow Gr(k) \longrightarrow Vect(k)$

$$S \longmapsto \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} Hom_{\mathcal{C}}(L^{\otimes(-n)}, gr^{w}_{n} S)$$

$(\mathcal{C} = MTH(k) \Rightarrow \omega = \omega_{dR})$

• $\mathcal{C} \to Gr(k)$ соотв. $G_\omega \leftarrow \mathbb{G}_m$

• $\langle L\rangle_{\otimes} \hookrightarrow \mathcal{C}$ соотв. $\chi: G_\omega \to \mathbb{G}_m$.

• $G \rightleftarrows \mathbb{G}_m = id_{\mathbb{G}_m}$, где L соотв. прямо $\mathbb{G}_m \to GL_1$
$z \mapsto z^{-1}$.

• $Ker(\chi) = U$ – проунипот. группа

Итак, $G_\omega = \mathbb{G}_m \ltimes U$, т.е.

$$1 \to U \to G_\omega \underset{\chi}{\rightleftarrows} \mathbb{G}_m \to 1$$

Ув. Если $Ext^2_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, L^{\otimes n}) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, и

$Ext^1_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, L^{\otimes n}) =: V_n$, $n > 0$ $(Ext^1_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, L^{\otimes(\leq 0)}) = 0)$, то

$U = Spec(T(\bigoplus_{n>0} V_n))$ с соотв-м действием $\mathbb{G}_m$

Д-во (это упр-ие про алгебр. группы)

Лемма (i) $Rep(G_\omega) \xrightarrow{\sim} Rep(U)^{\mathbb{G}_m}$

$$\| \in \{\mathbb{G}_m\text{-эквив. пред-я группы } U\}$$

$\{V$, действие U на V, д-ие $\mathbb{G}_m$ на V т.ч. $\forall v \in V, u \in U, a \in \mathbb{G}_m: a(u\cdot v) = a(u)\cdot a(v)\}$

(ii) $$\mathrm{Rep}(G_\omega) \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\text{forget}}} \mathrm{Rep}(\mathcal{U})$$

$$V \otimes_k \mathcal{O}(\mathbb{G}_m) \longleftarrow V$$

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L^n = \mathcal{O}(\mathbb{G}_m) \longleftarrow \mathbb{1}$$

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^i_{G_\omega}(\mathbb{1}, L^{\otimes n})$$

Это изом-м град. вект. пр-в, где на ЛЧ градка из действия $\mathbb{G}_m$

Пример $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{U}}(\mathbb{1},\mathbb{1}) = \mathrm{prim}\, \mathcal{O}(\mathcal{U})$ с д-м $\mathbb{G}_m \simeq$

$$\simeq \bigoplus_{n>0} \mathrm{Ext}^i_{G_\omega}(\mathbb{1}, L^{\otimes n}) = \bigoplus_{n>0} V_n. \quad \square$$

Дальше утв. к $\mathcal{U}$.

② Оценка на периоды

Пусть $\mathcal{C}$, w.S, ω, G_ω, $\mathcal{U}$ как выше.

Пусть $\eta: \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}(k)$ фф слой

($\eta = \omega_B$ для $\mathcal{C} = MTM(\mathbb{Q})$, $k = \mathbb{Q}$).

$$I(\omega, \eta) = \underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega, \eta)$$

левый G_η-торсор, правый G_ω-торсор

Пусть $k \subset K$, $p \in I(\omega,\eta)(K)$

($K = \mathbb{C}$, $p =$ comp)

Пусть $c: K \xrightarrow{\sim} K$ автоморфизм над k ($c =$ компл. сопр.)

Пусть $\mathcal{S}$ — (инд-) объект в $\mathcal{C}$.

($\mathcal{S} = \mathcal{O}(\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}; 0, 1))_H$)

$P \subset K$ — это образ

$$\omega(S)\otimes\eta(S)^\vee \longrightarrow \mathcal{O}(I(\omega,\eta)) \xrightarrow{p^*} K,$$

т.е. P = "периоды $\mathcal{S}$ в K отн-но p".

($(\omega=\omega_{dR})(S) = T(\Omega)$, $\eta(S)^\vee \ni dch$

MZV $\in P$)

Фильтр-ия $W.\mathcal{S}$ опр-т фильтрацию $W.\omega(S)$ (расщепл. ф-ия), это опр-т фильтрацию на $\omega(S)\otimes\eta(S)^\vee$ (с трив. ф-ией на $\eta(S)^\vee$). Это опр-т ф-ию на P.

($W. \subset P^c = P \cap K^c$

весовая ф-ия на MZV)

Пусть $gr^W_{<0} S = 0$, т.е. все веса в S ≥ 0

(это вып-ся для $\mathcal{O}(\pi_1(\ldots))_H$)

$\otimes$ (см. след. страницу)

<u>Лемма</u> Тогда фильтрованное k-вект. пр-во P^c изоморфно (строгому) подфактору в град. k-вект. пр-ве

$$k[t^2]\otimes_k T\Big(\bigoplus_{n>0} V_n\Big), \text{ где } |t| = 1.$$

$\mathcal{O}(\mathbb{G}_m) = k[t, t^{-1}]$

Д-во

Шаг 1 P - подфактор в $\mathcal{O}(I(\omega,\eta))$.

P^c — подфактор в $\mathcal{O}(I(\omega,\eta))^{\epsilon}$. ($\mathrm{char}(k)=0 \neq 2$)

(*) Пусть $\exists$ нетрив. $\epsilon \in G_\eta(k)$, $\epsilon^2=1$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(I(\omega,\eta)) \arrow[r, "p^*"] \arrow[loop below, "\epsilon"] & K \arrow[loop below, "c"] \end{tikzcd}$$

Шаг 2 Т.к. $H^1(Gal_k, G_m) = H^1(Gal_k, U) = 0$, то $H^1(Gal_k, G_\omega) = 0$. Поэтому $\exists\, \omega \simeq \eta$ над k и мы можем считать, что $\omega = \eta$.

Шаг 3 M-м град. вект. пр.

$\alpha: \omega(S) \otimes \eta(S)^\vee \to \mathcal{O}(I(\omega,\eta))$

град-ка на ω соотв-т тому, что $\omega(S) \in Rep(G_\omega)$ $G_m \hookrightarrow G_\omega$

град-ка из правого д-ия G_ω на $I(\omega,\eta)$, и $G_m \hookrightarrow G_\omega$

Т.к. $gr^{\omega}_{<0} S = 0$, то $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \mathcal{O}(I(\omega,\eta))_{\geq 0}$

Шаг 4 При $\omega=\eta$, рассм. изом-м алг. многообр.

$G_m \times U \simeq G_\omega = I(\omega,\overset{\omega}{\eta})$

$(a,u) \longmapsto a \cdot u$

Тогда это изом-м G_m-эквив. мн-ий, где G_m д-т на себе сдвигами, на U как раньше:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m \times U & \xrightarrow{\sim} & G_w \\ (a,u) & \longmapsto & a\cdot u \\ b\in\mathbb{G}_m \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \\ (ab,\, b^{-1}ub) & \longmapsto & a\cdot u\cdot b \end{array}$$

Следов-но,

$$\mathcal{O}(I(w,\eta=w)) \simeq \underset{\substack{\cup\!| \\ T(\bigoplus_{n\geq 0} V_n)}}{k[t,t^{-1}]} \otimes \mathcal{O}(U) \quad (*)$$

град. вект. прв

Т.к. $gr^W_{<0} S = 0$, то действие $G_w = \mathbb{G}_m \ltimes U$ на $w(S)$ продолжается через действие моноида $\mathbb{A}^1 \ltimes U = \tilde{G}_w$

$\Rightarrow w(S)\otimes \eta(S)^\vee \to \mathcal{O}(I(w,\eta))$ продолж.

через $\mathcal{O}(\tilde{I})$, где

$$\tilde{I} = I(w,\eta) \times_{G_w} \tilde{G}_w$$

Из (*) следует, что

$$\mathcal{O}(\tilde{I}) \simeq k[t] \otimes \mathcal{O}(U).$$

град вект. прв

Шаг 5 Лемма $\forall$ центр. эл-т порядка 2 в $G_w = \mathbb{G}_m \ltimes U$ сопряжён в G_w над k эл-ту $-1 \in \mathbb{G}_m \hookrightarrow G_w$

$\Rightarrow \mathcal{O}(\tilde{I})^{\epsilon} \simeq k[t^2] \otimes \mathcal{O}(U)$ $\square$

$\mathcal{C}$ к-ия как выше, S, … ε, …

$$\mathcal{C} \overset{\omega}{\underset{\eta}{\rightrightarrows}} Vect(k)$$

$$\boxed{\text{Верхняя оценка на } Ext^1_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, L^{\otimes n}) \Rightarrow \text{верхняя оценка на периоды } S.}$$

Замеч. $\mathcal{D} \xhookrightarrow{\text{неполная подкат.}} \mathcal{C} \overset{\omega}{\underset{\eta}{\rightrightarrows}} Vect(k)$

$Ext^1_{\mathcal{D}} \hookrightarrow Ext^1_{\mathcal{C}}$

$S \in \mathcal{D}$, все усл-я на $\mathcal{D}$ анал. усл-м на S.

$$\begin{pmatrix} G_{\mathcal{D}} \leftarrow G_{\mathcal{C}} \\ U_{\mathcal{D}} \twoheadleftarrow U_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$$

Тогда, благодаря $\mathcal{D}$, получаем более точную оценку на периоды.

Замеч. • $\varepsilon \notin G_{\mathbb{B}}(\mathbb{Q})$ для $MTM(\mathbb{Q})$

• $Ext^1_{MTM(\mathbb{Q})}(\mathbb{1}, \mathbb{Q}(n))$ бесконечном. в.п./$\mathbb{Q}$. $n>0$

Цель: Что-то сильно меньшее чем $MTM(\mathbb{Q})$, где всё равно живёт $\mathcal{O}(\pi_1(\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}; 0,1))$ $\mathcal{D}=?$

③ Мотивы Воеводского

• $\left\{\begin{matrix}\text{многообразия}\\ /k\end{matrix}\right\} \xrightarrow[H^i]{\text{Теории когомологий}} \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_{k/\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_p}$

$\nwarrow$ Таннак. к-ия

$\mathcal{C} = MH(k),\ k \subset \mathbb{C}$

• Есть много общего у теорий когомологий:

- функт-ть, $\otimes$
- $MV: X = U \cup V \Rightarrow$
  $\ldots \to H^i(X) \to H^i(U) \oplus H^i(V) \to H^i(U \cap V) \to \ldots$
- $Z \overset{c}{\hookrightarrow} X$ гладкие $\quad H^i(Z)(-c) \to H^{i+2c}(X) \to$
  $\to H^{i+2c}(U) \to \ldots$
- есть теория весов
- $H^{\cdot}(X \times \mathbb{A}^1) \cong H^{\cdot}(X)$

• Гротендик:

$\exists$ Таннак. к-ия $MM(k)$ смеш. мот. $/k$

в к-рой $\exists$ точная $\otimes$ фильтрация w. M

"универсальная теория когом", т.е.

$\left\{\begin{matrix}\text{мн-ия}\\ /k\end{matrix}\right\} \to MM(k) \xrightarrow{\exists!} \mathcal{C}$, $\quad \left\{\begin{matrix}\text{мн-ия}\\ /k\end{matrix}\right\} \xrightarrow{H^i} \mathcal{C}$

$\mathcal{C}M(k)$

• Гротендик: мотивы Чжоу $=$

$= \left\{ RH(X) = M(X) \in D^b(MM(k)) \right\}^c \subset$

X — гл. проект. $\quad$ $\|$ (произв. категория)

$\subset D^b(MM(k))$

$\ldots\ 0 \to \cdot \to \cdot \to \cdot \to \cdot \to \cdot\ 0 \ldots$

Воеводский: "$D^b(MM(k))$" $= DM(k)$ (gm).

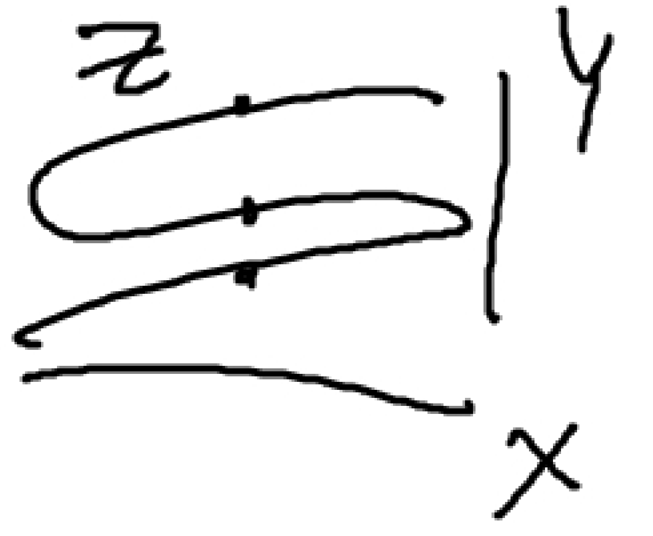
④ Определение $DM(k)$

$Sm(k) = \{$гладкие мн-ия$/k\}$
$\Downarrow$
X, Y

Опр. $Cor(X,Y) = \{ Z \subset X\times Y$ замк-тые $\mid pr_{X_i}: (Z\cap X_i\times Y) \to X_i$ конечн. сюръект. $\}$ — конечные соотв-ия
$\Downarrow \varnothing$.

$\forall$ комп-ты X_i в $X = \coprod_i X_i$

"конечнозначные от-ия в X в Y"



$\dim Z = \dim X$

Замеч. $\exists$ комп-ие

$$Cor(X,Y)\times Cor(Y,T) \to Cor(X,T)$$
$$(Z, W) \mapsto p_{XT}\left(p_{XY}^{-1}(Z)\cap p_{YT}^{-1}(W)\right)$$

$$\begin{tikzcd} & X\times Y\times T \arrow[dl, "p_{XY}"'] \arrow[d, "p_{XT}"] \arrow[dr, "p_{YT}"] & \\ X\times Y & X\times T & Y\times T \end{tikzcd}$$

$Z \subset X\times Y$, $W \subset Y\times T$

? (имеет нужную разм-ть, корректно)

Явно: $x \xmapsto{Z} \{y_1,\dots,y_n\} \longmapsto \{t_{11},\dots,t_{1r_1}, t_{21},\dots,t_{2r_2}, \dots, t_{n1},\dots,t_{nr_n}\}$

$y_i \xmapsto{W} \{t_{i1},\dots,t_{ir_i}\}$

Замеч. Гротендик рассм. все $Z \subset X\times Y$, $\dim Z = \dim X$; чтобы всех их пересекать, надо рассм. циклы по модулю рац. экв-ти, т.е

$[Z] \in CH'(X\times Y)$.

чтобы $(f\times T)_*$ был. корр-опред., нужно, чтобы мн-ия были гладкие проект.

Sm Cor(k) — категория, в которой

- объекты = гладкие мн-ия $/k$
- м-мы = $\mathbb{Q}\cdot Cor(-,-)$.

Замеч. Sm Cor(k) — аддит. кат-ия. (в отличие от $\mathbb{Q}\cdot Sm(k)$!) т.е. есть $\oplus$, заданные $\sqcup$:

X, Y, T

$Mor(X\sqcup Y, T) = Mor(X,T)\sqcup Mor(Y,T)$

$Mor(T, X\sqcup Y) \overset{?}{\neq} Mor(T,X)\sqcup Mor(T,Y)$

но:

$Cor(X\sqcup Y, T) = Cor(X,T)\sqcup Cor(Y,T)$

$Cor(T, X\sqcup Y) = Cor(T,X)\sqcup Cor(T,Y)$

$K^b(Sm\,Cor(k)) = \left(\begin{array}{l}\text{гомотопич. кат-ия}\\ \text{от } Sm\,Cor(k)\end{array}\right)$

Ψ

- $0\to X^1 \xrightarrow{d} X^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} X^n \to 0$, $d^2=0$,

  где $X^i\in Sm(k)$, $\to$ — формал. комб. конечн. соответствий
- м-мы — с точностью до гомот. экв-ти

$Sm(k) \xrightarrow{M} K^b(SmCor(k))$

$X \longmapsto M(X) = (0 \to \dots \to 0 \to \underset{\text{0-степ}}{\overset{Y \,\uparrow f}{X}} \to 0 \to \dots)$

$(f: X \to Y) \longmapsto (f: M(X) \to M(Y))$

$M(X)$ = "гомология" от X

- $\pi: X \to Spec(k) = pt \Rightarrow (\overset{0}{M(X)} \to \overset{1}{M(pt)}) =: \tilde{M}(X)$ привед. мотив X
- $X(k) \ni x \Rightarrow M(pt) \to M(X)$

<u>Замеч.</u> $f: X \to Y$ м-м мн-ий $\Rightarrow$ $\Gamma_f \in Cor(X, Y)$

<u>Замеч.</u> $K^b(SmCor(k))$ триангулир. к-ия

т.е. $C^\cdot \xrightarrow{f} D^\cdot \to cone(f)^\cdot \to C^\cdot[1]$ — выд. треугольники:

$C \to D \to E \to C[1]$

- $M(X \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{\pi_X} M(X)$

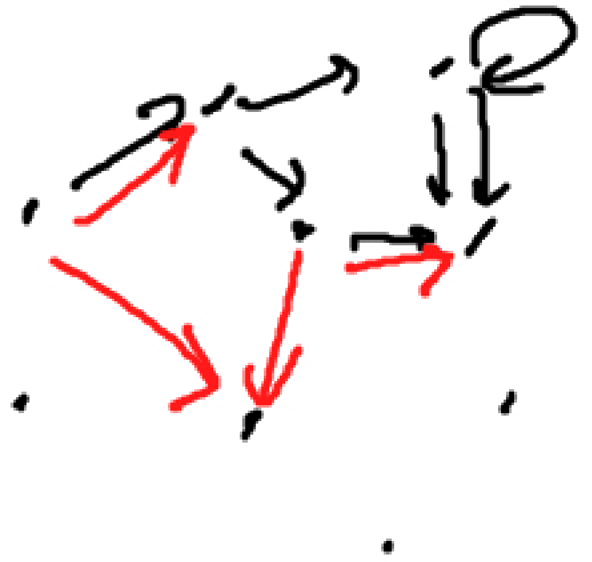
$U \cap V \hookrightarrow U, V \overset{\text{откр.}}{\hookrightarrow} X$

- $$\begin{array}{ccccc} (M(U\cap V) & \xrightarrow{\alpha} & M(U) \oplus M(V)) & = & cone(\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \xi_{U,V} \quad \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & M(X) & = & M(X) \end{array}$$

<u>Хотим:</u> π_X, $\xi_{U,V}$ были <u>изом.</u>, в част.

$\dots \to M(U \cap V) \to M(U) \oplus M(V) \to M(X) \to M(U\cap V)[1] \to \dots$ выдел. треуг.

<u>Лок-ия по Вердье:</u>



- хотим обратить $\nearrow$
- добавляем $\swarrow$ — обратная к каждой $\nearrow$ и все возникающие композиции

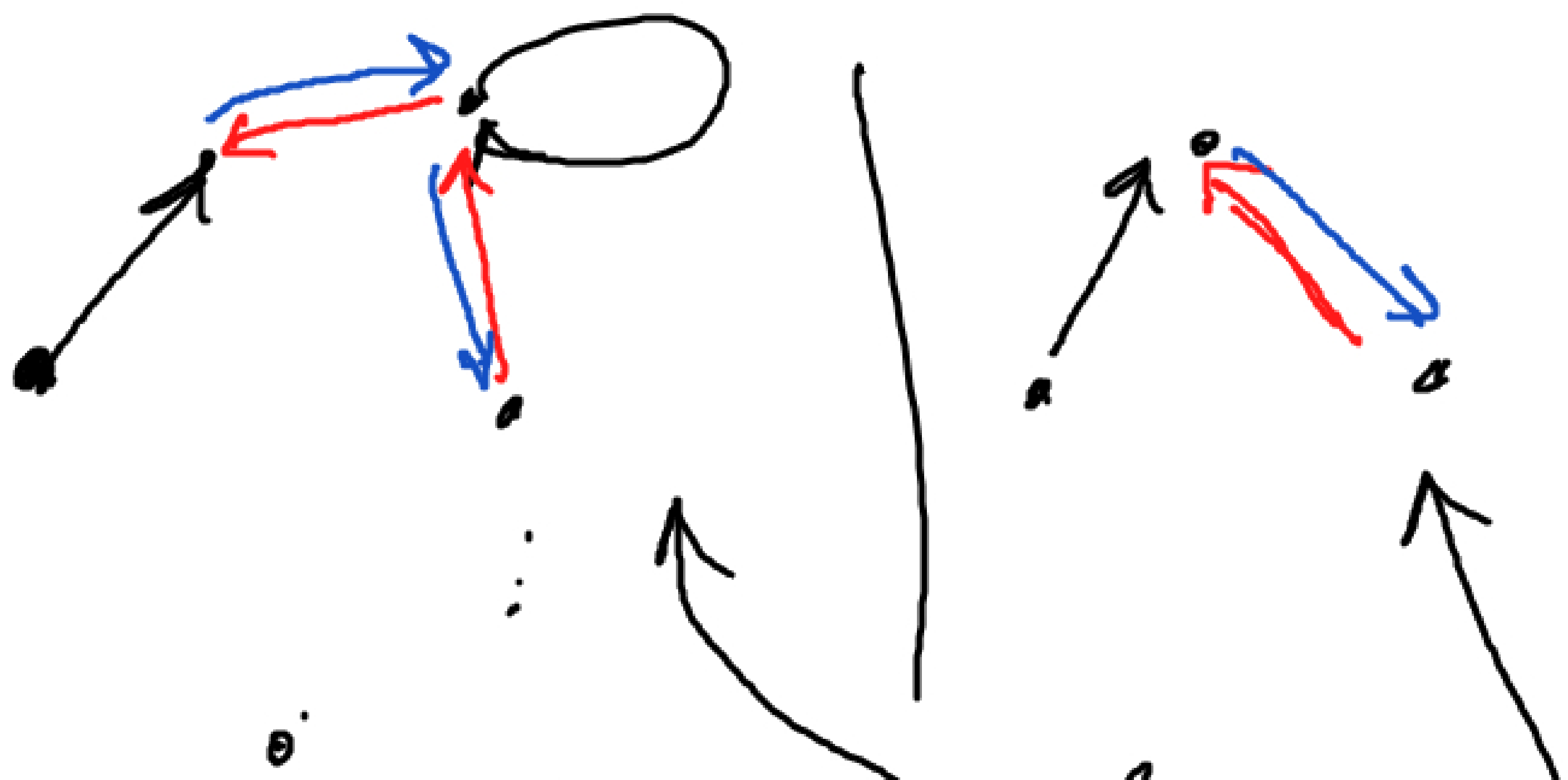
<u>Пример</u>  колчан $\rightsquigarrow$ образуем в ней мн-во путей

т.е. рассм. слова

$g_1 g_2^{-1} g_3 g_4^{-1} \cdots g_n^{\pm 1}$, где $g_i \in$ (полугр.).

$g_1^{-1} g_2 g_3^{-1} \cdots g_n^{\pm 1}$

В новой кат-ии морфизмы — это пути



Усл-е Оре ⇒ все пути сводятся к (тот же или в новой к-ии)

$DM(k)^{eff} :=$

$= \Big(K^b(\mathrm{SmCor}(k))$ с обращёнными π_X и $\xi_{U,V}$ по всем X, $X = U \cup V \Big)^{\#}$

Утв. $DM(k)^{eff}$ — триангл. к-ия.

$\mathcal{C}$ аддит. к-ия ⇒

$\mathcal{C}^{\#}$ идемп. пополнение =

= {добавление всех прямых слагаемых отн-но идемп.}

$\{(\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{C}}}{X}, p) \mid p: X \to X,\ p^2 = p\}$, $(X, p) = \mathrm{Im}(p)$

$p: V \to V,\ p^2 = p \Rightarrow V = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{q}}((X,p),(Y,q)) = q\circ \mathrm{Hom}(X,Y)\circ p.$$

$\mathcal{C}^{q}$ – унив. кат-ия, содерж $\mathcal{C}\hookrightarrow\mathcal{C}^{q}$ и в к-рой любой идемпотент приводит к разложению в прямую сумму.

Пример $M(X)\simeq M(pt)\oplus\tilde{M}(X)$, если $X(k)\neq\emptyset$.

$$M(\mathbb{P}^1)=M(pt)\oplus\tilde{M}(\mathbb{P}^1),$$

Опр. $\tilde{M}(\mathbb{P}^1)=:\mathbb{Q}(1)_M[2]$
$\overset{\shortparallel}{H_2}(\mathbb{P}^1)$

Замеч $DM(k)^{eff}$ симм. $\otimes$, где

- $M(X)\otimes M(Y)=M(X\times Y)$
- $\mathbb{1}=M(pt)$

Пример $\forall X$ $M(X)$ коммут. коалгебра в $DM(k)^{eff}$:

$$M(X)\longrightarrow M(X)\otimes M(X)=M(X\times X)$$

диагональ.

Замеч Чтобы иметь дв-ную алгебру Hom, надо что-то сделать. В частности надо, чтобы появилось $\mathbb{Q}(-1)_M=\mathbb{Q}(1)_M^{\vee}$