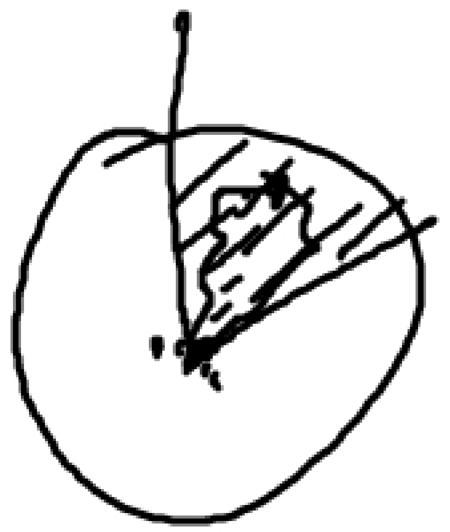
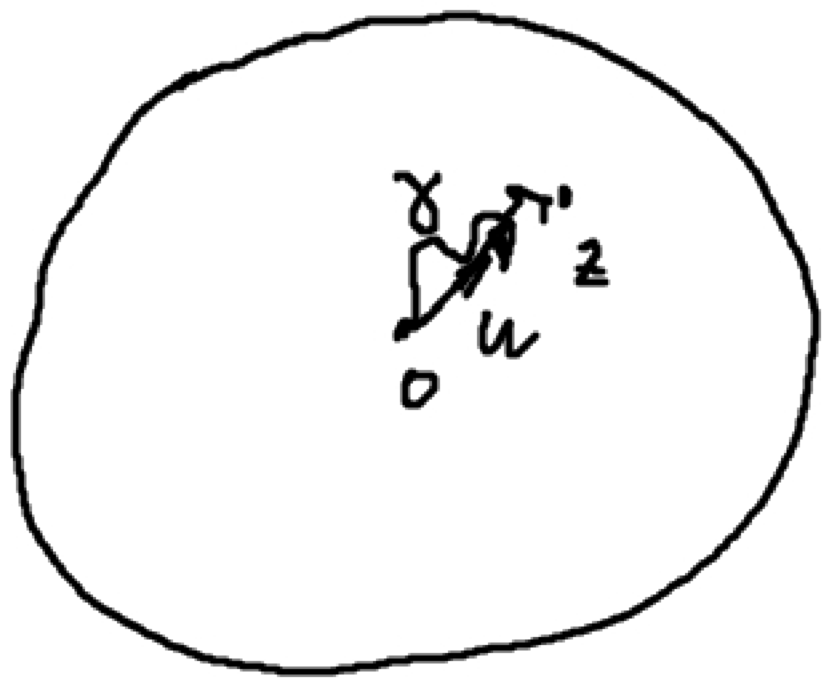
0 Напоминание



- $\Delta = \{z \mid |z|<1\}$
  $\cup$
  $\mathring{\Delta} = \Delta \setminus \{0\}$

- (E,∇) расслоение с регул. ос-тью на $(\Delta,\{0\})$: в коорд.:
  $\nabla : E \longrightarrow \Omega^1_{\Delta,an}(\{0\}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Delta,an}} E$; $\nabla(f) = df - N\cdot f\,\frac{dz}{z}$, $N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.
  Пусть $\lambda : E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\oplus n}_{\Delta,an}$ тривиализация расслоения на Δ

- $u \in T_0\Delta$



Δ

- $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Delta$ т.ч.
  $\gamma(0) = 0$, $\gamma^{-1}(0) = 0$
  $\gamma(1) = z$
  $\gamma'(0) = u$ $\qquad e^{\log\varepsilon \cdot N} = \varepsilon^N$

Опр. $$\int_\gamma \nabla := \lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\int_{\gamma|_{[\varepsilon,1]}} \nabla}_{\in} \cdot \underbrace{\overbrace{\varepsilon^{-\mathrm{res}_0(\nabla)}}^{\sim}}_{\in\ \mathrm{End}(E|_0)}$$

$$GL_n(\mathbb{C}) \overset{\lambda}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E|_{\gamma(\varepsilon)}, E|_z)$$

Утв. $\int_\gamma \nabla$ не зав-т от выбора λ, корр. опред. и зав-т только от гомот. класса γ с фикс. $\gamma'(0)=u$, $\gamma(1)=z$.

(1) Гл. проект. кривая

- $\overline{X}$ — гл. проект. кривая / $\mathbb{C}$
- $X = \overline{X} \setminus D$, $D \subset \overline{X}$ (привед.) дивизор

- $x \in D \subset \overline{X}$, $b \in X$
- $u \in T_x \overline{X}$
- $\gamma : [0,1] \longrightarrow \overline{X}$ т.ч. $\gamma\big((0,1]\big) \subset X$

  $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = u$, $\gamma(1) = b$
- $(E, \nabla) \in \mathrm{Conn}^{reg}_{\overline{X}, D}$ т.е. $\nabla : E \longrightarrow \Omega^1_{\overline{X}}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} E$, $\nabla^2 = 0$

__Опр.__ $\displaystyle\int_\gamma \nabla := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma|_{[\varepsilon, 1]}} \nabla \circ \varepsilon^{-\mathrm{res}_x(\nabla)}$,

где делаем выбор тривиализации E в окр-ти x.

__Сл-ие__ Это корректно, зав-т только от гом. класса γ (с фикс...), не зав-т от выбора тривиал.

__Опр__ $\pi_1(X; u, b) := \{$гомот. классы путей γ как выше$\}$

Итак, имеем $\int_\gamma \nabla$ для $\gamma \in \pi_1(X; u, b)$

(2) Вариант с двумя касат. точками

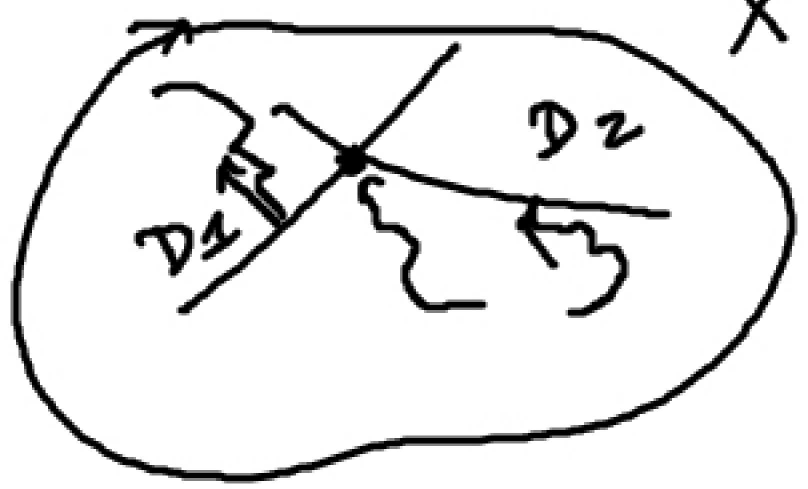
• $X, \bar{X}, D$ как выше

• $x, y \in D$; $u \in T_x \bar{X}$, $v \in T_y \bar{X}$

• $\gamma : [0,1] \to \bar{X}$ т.ч. $\gamma(0,1) \subset X$

• $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$; $\gamma'(0) = u$, $\gamma'(1) = -v$

$\bar{X} \supset D$



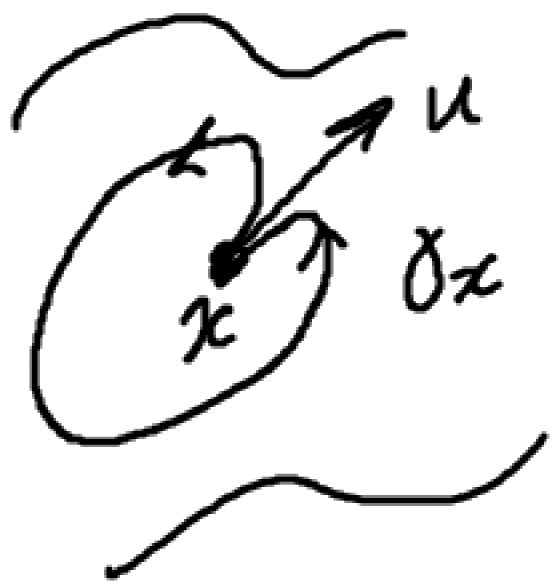
$T_x X |_{T_x D}$

Опр. $\pi_1(X; u, v) = \{$ гомот. классы таких путей с фикс. $x, y, u, v \}$

Замеч. $\pi_1(X; u, v) \longrightarrow \pi_1(\bar{X}; x, y)$ не вложение!

Пример $\pi_1(X; u) \ni \gamma_x$

$\gamma_x \longmapsto e$



Опр. $\int_\gamma \nabla := \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{res_y(\nabla)} \int_0 \nabla \circ \varepsilon^{-res_x(\nabla)}$, где $\gamma|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} = \gamma_\varepsilon$

$\gamma \in \pi_1(X; u, v)$.

Пример $\int_{\gamma_x} \nabla = e^{2\pi i \, res_x(\nabla)}$

③ Случай $\mathbb{P}^1 \setminus D$

Напом-ие: M, $\omega_1,\dots,\omega_n \in A^1_M$, $d\omega_i = 0$, $\omega_i \wedge \omega_{i+1} = 0$,

γ – путь на M $\Rightarrow$

Рассм. $\int_\gamma \nabla$, где ∇ св-ть на трив р-ии, заданная $d - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \omega_n \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}}_{N}$.

ранга $n+1$

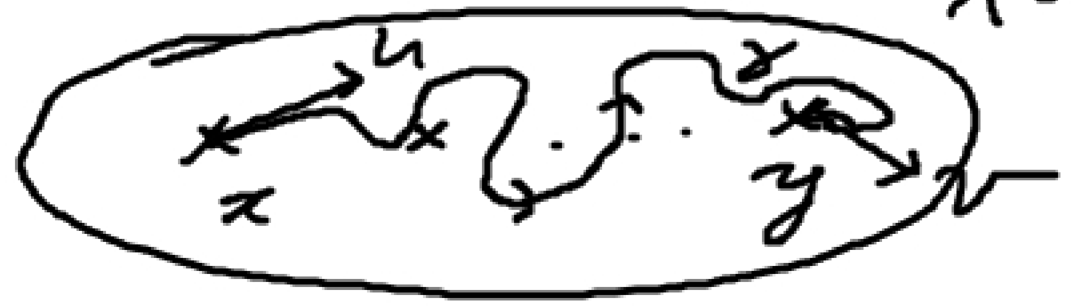
Тогда $\int_\gamma \nabla = \int_\gamma (\underbrace{1+N+N^{\otimes 2}+N^{\otimes 3}+\dots}_{P})$,

причём $P_{ij} = \begin{cases} 0, & i>j\\ \omega_i \otimes\dots\otimes \omega_{j-1}, & i<j \\ 1, & i=j\end{cases}$

$\int_\gamma \omega_1\dots\omega_n$ — это правый верхний эл-т в $\int_\gamma P$.

Пусть $\bar X$, X, D, x, y, u, v, γ как выше.

$\bar X \supset X$



$\Omega := H^0(\bar X, \Omega^1_{\bar X}(D))$

Замеч. $\forall\, \omega_1,\dots,\omega_n \in \Omega$ $d\omega_i = 0$, $\omega_i \wedge \omega_{i+1} = 0$,

т.к. $\dim(X) = 1$

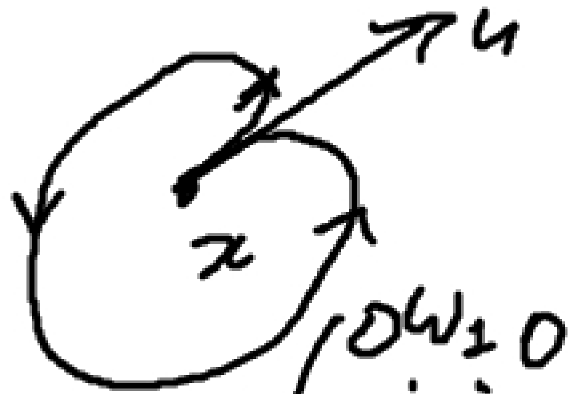
Опр $\int_\gamma \omega_1\dots\omega_n$ — это правый верхний эл-т в $\int_\gamma \nabla$, где $\nabla = d - \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \omega_n \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$.

$d - \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Пример $\omega \in \Omega$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{res}_y\omega \\ 0 & 0\end{pmatrix}} \cdot \int_{\gamma_\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \varepsilon^{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{res}_x\omega \\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\gamma_\varepsilon}\omega + \log(\varepsilon)(\mathrm{res}_x(\omega) - \mathrm{res}_y(\omega))\right)$$

<u>Пример</u> $\gamma_x =$ 

$$\int_{\gamma_x}\nabla = e^{2\pi i\, res_x\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma_x}\omega_1\ldots\omega_n = \frac{(2\pi i)^n}{n!}\prod_{j=1}^{n} res_x(\omega_j).$$

$$\int_{\gamma_x}\omega = 2\pi i\, res_x(\omega)$$

<u>Утв-упр.</u>

$$\int_\gamma \omega_1\ldots\omega_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{0\le i\le j\le n}\frac{(-1)^i}{i!\,(n-j)!}\prod_{l=1}^{i} res_y(\omega_l)\cdot\int_{\gamma_\varepsilon}\omega_{i+1}\ldots\omega_j\cdot\prod_{l=j+1}^{n} res_x(\omega_l)\log(\varepsilon)^{i+n-j}$$

<u>Сл-ие</u> Если $res_y(\omega_1) = res_x(\omega_n) = 0$, то

$$\int_\gamma \omega_1\ldots\omega_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\omega_1\ldots\omega_n.$$

<u>Пример</u> $\zeta(\bar n)$, $\bar n = (n_1,\ldots,n_r)$,

допуст., т.е. $n_1 \ge 2$.

$\bar n \leftrightarrow \bar w$ — слова из 0, 1, нач. с 0, конч. 1

$$(\underbrace{0\ldots0}_{n_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{n_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{n_r-1}1)$$

$\bar w \leftrightarrow \bar\omega$ $\qquad$ $\bar n \leftrightarrow \bar\omega(\bar n)$

$0 \leftrightarrow \omega_0 = \frac{dz}{z}$

$1 \leftrightarrow \omega_1 = \frac{dz}{1-z}$

$X = \mathbb{P}^1$, $D = \{0,1,\infty\}$, $\gamma = dch: [0,1]\hookrightarrow\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\subset\mathbb{CP}^1$

$\pi_1(\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\};0,1)$

$$\int_{dch} \bar\omega(\bar n) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{dch_\varepsilon} \bar\omega(\bar n) = \zeta(\bar n)$$

---

④ Стр-ра Ходжа на касат. путях

Хотим опред-ть стр-ру группоида в $MTH(k)$ над $(\mathbb{P}^1 \setminus D = X) \cup \bigcup_{x\in D(k)} (t_x X \setminus \{0\})$

$b \in X(k)$, D опред $/k$

- $\mathcal{O}(\pi_1(X; u, b)_H) \in \mathrm{Ind}\, MTH(k)$:

$$\mathcal{O}(\pi_1(X; u, b)_{dR}) = T(\Omega)$$

$$F^p T(\Omega) = \bigoplus_{i\ge p} \Omega^{\otimes i}$$

$$W_n T(\Omega) = \bigoplus_{0\le i\le n} \Omega^{\otimes i}$$

- $\mathcal{O}(\pi_1(X; u, b)_B) = \mathcal{O}(\pi_1(X; u, b)^{un}_{\mathbb{Q}})$,

где $\pi_1(X; u, b)$ – (правый) торсор над $\pi_1(X; b)$, левый торсор над $\pi_1(X; u)$

- comp: $T(\Omega)\otimes_k \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}(\pi_1(X; u, b)^{un}_{\mathbb{C}})$

задаётся $\pi_1(X; u, b) \longrightarrow \mathrm{Spec}(T(\Omega)\otimes_k \mathbb{C})$

$$\gamma \longmapsto \left(\omega_1\otimes\ldots\otimes\omega_n \longmapsto \int_\gamma \omega_1\ldots\omega_n\right)$$

Замеч Аналогично для $\pi_1(X; u, v)$

Лемма сопр изом-м продукта.

Д-во. • сопр соотв. м-ду группи и торсоров:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X;u,b)^{un}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\sim"'] & \operatorname{Spec}(T/\Omega)\otimes_k \mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
\pi_1(X;b)^{un}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\sim", "\Gamma"'] \arrow[u, Rightarrow, "N"'] & \operatorname{Spec}(T/\Omega)\otimes_k \mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
 & H^0(B;b^*)
\end{tikzcd}$$

по теор. Чена!

•
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X;u,b)^{un}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, Rightarrow] & \operatorname{Spec}(T/\Omega)\otimes_k \mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
\pi_1(X,u)^{un}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{Spec}(T/\Omega)\otimes_k \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

• $\pi_1(X;u,v)$ – торсор над $\pi_1(X;u)$ и далее анал. $\square$

Замеч. Здесь везде исп-ся, что для $\int_\gamma \omega_1\dots\omega_n$, $\gamma\in\pi_1(X;u,b)$, $\pi_1(X;u,v)$ выполнены все станд. св-ва;
- пр-ие инт-лов
- композиция пути
- обратный путь.

Замеч. $W_\cdot = N_\cdot$ унипот. фил на $\mathcal{O}(\pi_1(X;u,v)^{un}_{\mathbb{Q}})$ $\leftarrow$ торсор над $\pi_1(X;u)^{un}_{\mathbb{Q}}$.

$gr_i^N \mathcal{O}(\pi_1(X;u,v)_B) = ?$

<u>Замеч.</u> G проунип., T – G-торсор $\Rightarrow$

$\mathrm{Spec}(gr_0^N \mathcal{O}(T))$ торсор над $\mathrm{Spec}(gr_\cdot^N \mathcal{O}(G))$

здесь есть кан. точка $\Rightarrow$

$gr_\cdot^N \mathcal{O}(T) \xrightarrow{\sim} gr_\cdot^N \mathcal{O}(G)$

<u>У нас:</u>

$gr_i^N \mathcal{O}(\pi_1(X;u,b)_B) \simeq gr_i^N \mathcal{O}(\pi_1(X,b)_B)$

$gr_i^N \mathcal{O}(\pi_1(X;u,b)_{dR}) \simeq gr_i^N \mathcal{O}(\pi_1(X,b)_{dR}) = \Omega^{\otimes i}$

$F^\cdot$ индуц. на $(gr_i^N \mathcal{O}_B, gr_i^N \mathcal{O}_{dR})$ струу

Ходжа $H^1(X)^{\otimes i} \simeq \mathbb{Q}(-i)^{\oplus}$?

Итак, корр опред. торсор $\pi_1(X;u,b)_H$ над $\pi_1(X;b)_H$ в $\mathrm{Ind\,MHH}(k)$.

$\pi_1(X;u,v)_H \xleftarrow{\sim} \pi_1(X;u,b)_H \times_{\pi_1(X,b)_H} \pi_1(X,b,v)_H$

Вывод $\pi_1(\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\};0,1)_H$ — проалг. мн-ие в $MTH(k)$, т.е. $\mathcal{O}(\pi_1(\ldots)_A)$ алгебра в $\operatorname{Ind} MTH(k)$, $dch \in \mathcal{O}(\pi_1(\ldots)_B)^\vee$, $\bar{\omega}_1(\bar{n}) \in \mathcal{O}(\pi_1(\ldots)_{dR})$

$\langle comp(\bar{\omega}(\bar{n})), dch\rangle = \zeta(\bar{n})$

Замеч.
- Все веса $\mathcal{O}(\pi_1(\ldots)_H) \geq 0$
- $\zeta(\bar{n}) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Идея: категорные св-ва $MTH(k) \supset MTM(k)$

$\Downarrow$

верхние оценки на периоды всех об-в в $\operatorname{Ind}(MTH(k))$ с весами ≥ 0.

$dch: \mathcal{O}(\pi_1(\ldots)_{dR}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$W. \longrightarrow W.$

весов. ф-ия с т. зрения MZV