0) Напоминание

- k поле
- $DM(k)$ мотивы Воеводского

$$\begin{aligned} DM(k) &= DM(k)^{eff}[\mathbb{Q}(1)^{-1}], \\ DM(k)^{eff} &= \left(K^b(SmCor(k)) \Big/ \begin{smallmatrix} X\times\mathbb{A}^1 \to X \\ U\cap V \to U\oplus V \to U\cup V \end{smallmatrix} \right)^{\natural} \end{aligned}$$

- $M: Sm_k \longrightarrow DM(k)$

$$X \longmapsto M(X)$$

- $DM(k)$ $\otimes$, симм; жёсткая

$$M(X\times Y) \simeq M(X)\otimes M(Y)$$

- $M(X)^\vee$ ~~коалг~~ алгебра в $DM(k)$

- реализации:
- $\omega_\ell: DM(k) \to D^b(Rep^f(G_k))$

$$M(X) \longmapsto H^\bullet_{et}(X\times k^{sep}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee$$

- $k \subset \mathbb{C} \Rightarrow$

$$DM(k) \xrightarrow{\omega_H} D^b(MH(k)) \begin{array}{l} \xrightarrow{\omega_B} D^b(Vect^f(\mathbb{Q})) \\ \xrightarrow[\omega_{dR}]{} D^b(Vect^f(k)) \end{array}$$

$$M(X) \longmapsto H^\bullet(X)^\vee$$

- $\omega_{dR}: DM(k) \to D^b(Vect^f(k))$

$char(k) = 0$ $\quad X \longmapsto H^\bullet_{dR}(X)^\vee$

- $H^i_M(X, \mathbb{Q}(n)) := Hom_{DM(k)}(M(X), \mathbb{Q}(n)[i])$

<u>мотивные когомологии</u>

Теор. X гл. мн-ие $\Rightarrow$

$$H^i_M(X, \mathbb{Q}(n)) = K_{2n-i}(X)^{(n)}_{\mathbb{Q}} \subset K_{2n-i}(X)_{\mathbb{Q}}$$

(пр. слагаемое)

Теор. $H^{2i}_M(X, \mathbb{Q}(i)) = CH^i(X)_{\mathbb{Q}}$

($\mathbb{Z}$-коэф. тоже)

Гипотеза Бейлинсона-Суле

$$K_{2n-i}(X)^{(n)}_{\mathbb{Q}} = 0 \quad \text{при} \quad i < 0$$

[Это известно при $n < 0$ (Воеводский)]

① Смеш. мотивы Тэйта

Опр. $DTM(k) \subset DM(k)$

$\|$

(полная триан. подкат-ия, содерж. $\mathbb{Q}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$)

$\downarrow$ $\mathbb{Q}(n)[i]$

Опр. $MTM(k) \subset DTM(k)$

$\|$

(полная подкат-ия, содерж. $\mathbb{Q}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, з-тая отн-но расш-ий)

$M', M'' \in MTM(k)$,

$M' \to M \to M'' \to M'[1]$ выд. треуг. в $DM(k)$

$\to M \in MTM(k)$

Замеч. $\mathcal{A}$ — абел. к-ия,

$(*)$ $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ точная и-тв $\Longleftrightarrow$

$$A' \to A \to A'' \xrightarrow{\cdot\alpha} A'[1] \text{ выд. треуг.}$$

$\alpha \in Ext^1(A'', A')$ соотв. $(*)$

Теор. (Делинь–Гончаров)

Пусть выпол. г-за Бейл.-Суле для $X = Spec(k)$, т.е.

$$Hom_{DM(k)}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)[i]) = 0 \text{ при } i < 0.$$

Тогда:

(i) $MTM(k)$ абелева категория

(ii) $\otimes$ на $DM(k)$ сохр. $DTM(k)$, $MTM(k)$, $MTM(k)$ жёсткая и $\otimes$ точный фр

(ii) $$Ext^1_{MTM(k)}(M,N) \xrightarrow{\sim} Hom_{DM(k)}(M, N[1])$$

$$Ext^{i \geq 2}_{MTM(k)}(M,N) \hookrightarrow Hom_{DM(k)}(M, N[i])$$

(это индуц. $D^b(MTM(k)) \to DTM(k)$)

(iv) $\forall M \in MTM(k)$ $\exists$ функтор. по M фильтрация $W_\bullet M$ т.ч.

- $gr^W_n M \simeq \mathbb{Q}(-n)^{\oplus r_n}$
- W_n точная по M ($\Leftarrow$ все м-мы в MTM строгие отн-но)
- $W_\bullet$ уваж $\otimes$: $W_n(M \otimes M') = \sum_{i+j=n} W_i M \otimes W_j M'$.

Пример

$$M(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)=\underset{\substack{\parallel\\ H^0}}{\mathbb{Q}(0)}\oplus\underbrace{\mathbb{Q}(1)[2]^{\oplus 2}}_{\substack{\parallel\\ H^{-2}[2]}}\oplus\underset{\substack{\parallel\\ H^{-4}[4]}}{\mathbb{Q}(2)[4]}$$

$$M(\mathbb{P}^1)=\mathbb{Q}(0)[0]\oplus\mathbb{Q}(1)[2]$$

$$H^{-2}(M(\mathbb{P}\times\mathbb{P}))=\mathbb{Q}(1)^{\oplus 2}\in MTM(k)$$

$$M(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\in DTM(k).$$

Замеч. На самом деле, в усл-х теор. на $DTM(k)$ есть t-структура т.ч. $DTM(k)^{\leq 0}\cap DTM(k)^{\geq 0}=MTM(k)$

Пример. • $\mathcal{A}$ — абел. к-ия $\Rightarrow$ на $D^b(\mathcal{A})$ есть t-стр-ра: $(D^b(\mathcal{A})^{\leq 0}, D^b(\mathcal{A})^{\geq 0})$

$$D^b(\mathcal{A})^{\leq 0}=\{C^\cdot \mid H^{>0}(C^\cdot)=0\},\quad D^b(\mathcal{A})^{\geq 0}=\{D^\cdot \mid H^{<0}(D^\cdot)=0\}$$

$$D^b(\mathcal{A})^{\leq 0}\cap D^b(\mathcal{A})^{\geq 0}=\mathcal{A}$$

• $C^\cdot\in D^b(\mathcal{A})$

$\Downarrow$

$$H^i(C^\cdot)\in D^b(\mathcal{A})^{\leq 0}[-i]\cap D^b(\mathcal{A})^{\geq 0}[-i]=\mathcal{A}[-i]$$

• $H^i: D^b(\mathcal{A})\to\mathcal{A},\ i\in\mathbb{Z}$

Замеч. D триангул. к-ия; $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ t-стр-ра в D $\Rightarrow$

- $\mathcal{A}=D^{\leq 0}\cap D^{\geq 0}\subset D$ абелева
- $D^b(\mathcal{A})\to D$ (+ доп. условия...)
- $H^i: D\to\mathcal{A}$.

Сл-ие $H^i : DTM(k) \to MTM(k)$

Замеч.

$$DTM(k)^{\le 0} \subset DTM(k) \subset DM(k)$$

$\|$

(полная подкат., пор. $Q(n)[i]$, $n \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$, з-тая отн-но расш-ий)

---

② Реализации смеш. мот. Тейта

. $k \subset \mathbb{C}$; пусть вып. усл-я Теор.

$\omega_H : DM(k) \to D^b(MH(k))$

триангул. ф-р

Ограничим ω_H на $MTM(k)$:

$$\begin{tikzcd}
\omega_H : MTM(k) \arrow[rr] \arrow[rrdd, bend right] & & D^b(MH(k)) \\
& & MH(k) \arrow[u, hook] \\
& & MTH(k) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

так как $\omega_H(Q(1)) = Q(1)_H$

$$\left(\begin{array}{l} Q(1)_H = H_2(\mathbb{P}^1) = H^2(\mathbb{P}^1)^\vee \\ Q(-1)_H = H^2(\mathbb{P}^1) \end{array} \right)$$

Замеч. . ω_H – ⊗ функтор

. ω_H точный

(т.к. $DTM(k)^{\leq 0 / \geq 0} \to D^b(MH(k))^{\leq 0/\geq 0}$)

Сл-ие Имеем ф-р слоя

$\omega_B : MTM(k) \to Vect(\mathbb{Q})$

$$\omega_{dR} \simeq \omega : \underset{\underset{MTM(k)}{\cap}}{M} \longmapsto \underset{\underset{DM}{n \in \mathbb{Z}}}{\bigoplus} Hom\left(\mathbb{Q}(-n), \underset{\underset{Gr(k) \to Vect(k)}{\cap}}{gr_n^W M}\right)$$

Замеч

$MTM(k) \ni \mathbb{Q}(1)$

удовл. форм-лу про

$\mathcal{C} \ni L$, т.е. к-ый объект обратимые.

Сл-ие $(MTM(k), \omega) \simeq$

$\simeq (Rep^f(G_M), forget)$, где

$1 \to U_M \to G_M \leftrightarrows \mathbb{G}_m \to 1$,

U_M (град) про-унипот. группа,

т.е. $U_M = Spec(H)$,

H (град.) униип. ал. Хопфа.

③ Теорема Бореля

Теор. Т-за Б-С вып. для числ. полей k. (Борель)

Замеч. Борель вычисляет все

$$H^i_M(Spec(k), \mathbb{Q}(n)), \quad i,n \in \mathbb{Z},$$

т.е. $K_\bullet(k)_\mathbb{Q}$.

$\boxed{k=\mathbb{Q}}$

Отступление про $MTH(k)$

Утв. $k \subset \mathbb{C}$ поле $\Rightarrow$

$MTH(k) \xrightarrow{\sim} MTH(\mathbb{C}) \subset MH(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{matrix} \text{см} \\ \text{стр-ы} \end{matrix} \right\}$

экв-ть кат-ий

Док-во

$$H \longmapsto \left(H_B = H,\ H_{dR} = \left(\bigoplus_n \mathrm{Hom}_{MTH(\mathbb{C})}(\mathbb{Q}(-n), gr^W_n H) \right) \otimes_\mathbb{Q} k \right)$$

$\cap$ $MTH(\mathbb{C})$

обр. ф-р $\square$

Пример $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(0)) = \mathbb{Q}$

в $MTH(k)$ и в $MTH(\mathbb{C})$.

Пример

$$\mathrm{Ext}^1_{MTH(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0)_H, \mathbb{Q}(n)_H) \simeq$$

$$\simeq \mathbb{C}^* \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \xrightarrow{\log|\cdot|} \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = \mathbb{R} =$$

$\mathbb{R} = \mathrm{Ext}^1_{MH_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(n))$,

где $MH_{\mathbb{R}} = (H_{\mathbb{R}}, F^{\cdot} H_{\mathbb{C}})$.
$\uparrow f$
$\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$

<u>Утв.</u> $\mathrm{Ext}^{\geq 2}_{MH(\mathbb{C})}(H, H') = 0$

$\left(\Rightarrow \mathrm{Ext}^{\geq 2}_{MTH(\mathbb{Q})}(H, H') = 0\right)$

<u>Замеч.</u> $R\mathrm{Hom}_{MH(\mathbb{C})}(H, H') = R\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(0), \overbrace{\check{H} \otimes H'}^{E}) =$

$= \left(W_0 E \oplus F^0 E_{\mathbb{C}} \longrightarrow E_{\mathbb{C}}\right)$

<u>Пример</u> X гр. кр.

$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(-1), H^1(X)) =$

$= \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), H^1(X)(1)) =$

$= H^1(X, \mathbb{C}) \Big/ \left(H^1(X, \mathbb{Q}) + F^1 H^1(X, \mathbb{C})\right) =$

$= \mathrm{Pic}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

<u>Назад к Теор. Бореля</u>

Рассм. композиц-ию:

$$K_{2n-i}(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}} \to K_{2n-i}(\mathbb{Q})^{(n)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{DM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)[i]) \xrightarrow{\omega_H}$$

$$\xrightarrow{\omega_H} \mathrm{Hom}_{D^b(MH(\mathbb{R}))}(\mathbb{Q}(0)_H, \mathbb{Q}(n)_H[i]) =$$

$$= \mathrm{Ext}^i_{MH(\mathbb{C})}(\mathbb{Q}(0)_H, \mathbb{Q}(n)_H) = \left[\begin{cases} 0, & i \geq 2 \\ \mathbb{C}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, & i = 1 \end{cases}\right] \xrightarrow{\log|\cdot|}$$

$$\to \mathrm{Ext}^i_{MH_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})}(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(n)) \simeq \begin{cases} 0, & i \geq 2 \\ \mathbb{R}, & i = 1 \end{cases}$$

Итак, имеем

$$reg: K_{2n-i}(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>Пример</u> $n = i = 1 \Rightarrow \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \longmapsto \log|a|$

<u>Замеч.</u>

(i) $reg': K_{2n-i}(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}$

можно построить "явно",

используя $H_\bullet(GL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{R})$.

$$K_{\mathbb{Q}} = \pi_\bullet \hookrightarrow H_\bullet(-, \mathbb{Q}) \qquad \pi_\bullet = H_\bullet^{prim}$$

$$H_\bullet(GL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{R}) = H_\bullet(U_n(\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / GL_n(\mathbb{Z}))$$

<u>Теор</u> (i) $reg': K_{2n-1}(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, $n \geq 2$

(ii) $K_{2n}(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}} = 0,\ n \geq 1.$

(iii) Burgos: $\boxed{reg = reg'}$

$= reg''$

Терсфорж-ка:

$$\mathrm{Hom}_{DM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(m)[1]) = \begin{cases} \mathbb{Q}^* \otimes \mathbb{Q}, & \text{если } n = 1 \\ 0, & m \text{ чётно или отриц.} \\ \mathbb{Q}, & m \geq 3, \text{ нечётно} \end{cases}$$

$$\mathrm{Hom}_{DM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)[i]) = 0 \text{ при } i \neq 0, 1.$$

Пример

$K_2(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}} = 0.$

$$K_2(\mathbb{Q}) = K_2^M(\mathbb{Q}) = \langle \text{Гаусс} \rangle = \mathbb{Z}/2 \times \bigoplus_{\substack{p > 2 \\ \text{простое}}} \mathbb{F}_p^*.$$

Сл-ие для $k = \mathbb{Q}$

$$\mathrm{Ext}^2_{MTM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = 0$$

$\cap$ ДГ

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)[2])^{B+Б.} = 0$$

Сл-ие

$$V_M = \operatorname{Spec} T(\underbrace{\overset{V_1}{Q^* \oplus Q}}_{1} \oplus \underbrace{\overset{V_3}{Q}}_{3} \oplus \underbrace{\overset{V_5}{Q}}_{5} \oplus \ldots)$$

← градука.

$\tilde{G}_M := \tilde{V}_M \rtimes G_m$, где

$\tilde{V}_M = \operatorname{Spec} T(V_3 \oplus V_5 \oplus \ldots)$

$\operatorname{Rep}^f(\tilde{G}_M) \hookrightarrow \operatorname{Rep}^f(G_M) = MTM(\mathbb{Q})$

$\tilde{G}_M \twoheadleftarrow G_M$

$V_3 \oplus V_5 \oplus \ldots \hookrightarrow V_1 \oplus V_3 \oplus V_5 \oplus \ldots$

Утв.

$\operatorname{Rep} \tilde{G}_M =$

$= \{ M \in MTM(\mathbb{Q}) \mid \forall n \in \mathbb{Z}$

$0 \to \mathbb{Q}(-n+1)^{\oplus b} \to W_n M / W_{n+2} M \overset{\exists}{\Longleftarrow} \mathbb{Q}(-n)^{\oplus a} \to 0 \}$

$\|$

Опр $MTM(\mathbb{Z}) \hookrightarrow MTM(\mathbb{Q})$

($\mathbb{Z}$-мин. к-ия)

"неразв. смеш. мот. Тейт. $/\mathbb{Q}$"

Утв. Образ $MTM(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\omega_H} MTH(\mathbb{Q})$ замкнут отн-но подфак-ров.

Д-во

$$\begin{tikzcd}
MTM(\mathbb{Z}) \arrow[r] & MTH(\mathbb{Q}) \\
\mathrm{Rep}^f(\tilde{G}_M) \arrow[u, equal] \arrow[r] & \mathrm{Rep}^f(G_H) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{G}_M \arrow[d] & G_H \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathbb{G}_m & \mathbb{G}_m \arrow[l, "="']
\end{tikzcd}$$

т.к. $\omega_H(\mathbb{Q}(1)) = \mathbb{Q}(1)_H$

$$\tilde{U}_M \leftarrow U_M \leftarrow U_H$$

м-ма проунипот. групп

$U_H \to \tilde{U}_M$ индуц.

инъект. от-ие на

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{prim}\, \mathcal{O}(\tilde{U}_M) \arrow[r, hook] & \mathrm{prim}\, \mathcal{O}(U_H) \\
V_3 \oplus V_5 \oplus \dots \arrow[u, equal] \arrow[r, "\text{"reg"}"] & V_1^H \oplus V_3^H \oplus V_5^H \oplus \dots \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Борель: "reg" инъективен:

$$\begin{tikzcd}
V_n = K_{2n-1}(\mathbb{Q}) \arrow[r, hook, "(1)\ \text{"reg"}"] \arrow[drr, bend right, "reg"] & \mathrm{Ext}^1_{MH}(\mathbb{Q}(0)_H, \mathbb{Q}(n)_H) \\
\mathrm{Ext}^1_{MTM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) \arrow[u, equal] & & \mathbb{C}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[ul, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\log|\cdot|"] \\
& & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

(и нелегко)