0 Напоминание

- k поле
- $Sm_k \longrightarrow DM(k)$ триан. ⊗ жёстк. $\mathbb{Q}$-лин. к-ия
  $X \longmapsto M(X)$
  "унив. гомологии X"
- $M(\mathbb{P}^1) = \underbrace{\mathbb{Q}(0)}_{M(pt)} \oplus \mathbb{Q}(1)[2]$
- $DM(k) \supset DTM(k)$ полная трианг. ⊗, жёсткая $\mathbb{Q}$-лин.
  $\langle \mathbb{Q}(n), n\in\mathbb{Z} \rangle$
- $DTM(k) \supset MTM(k) = \{$итериров. расш. $\mathbb{Q}(n),\ n\in\mathbb{Z}\}$

- $BS(k)$:

  $Hom_{DM(k)}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)[i]) \overset{?}{=} 0$
  при $i<0$

Теор. $BS(k) \Rightarrow MTM(k)$ кат-ия Таннак., $\mathbb{Q}$,
$MTM(k) = DTM(k)^{\leq 0} \cap DTM(k)^{\geq 0}$

В частности, имеем

- $H^i: DTM(k) \longrightarrow MTM(k)$
- $Ext^1_{MTM} = Ext^1_{DTM}$
- $Ext^2_{MTM} \hookrightarrow Ext^2_{DTM}$.

~~Воеводский~~:
$Hom_{DM(k)}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)[i]) = K_{2n-i}(k)^{(n)}$

Теор. Бореля

BS (числ. поле)

Более точно, для $k = \mathbb{Q}$:

- $K_1(\mathbb{Q})^{(1)}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (очев.)
- $K_{4m+1}(\mathbb{Q})^{(2m+1)}_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$
- ост. $K_\circ(\mathbb{Q})^{(\circ)}_{\mathbb{Q}} = 0$.

Пример $K_2(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{p>2} \mathbb{F}_p^* \times \mathbb{Z}/2$

Кроме того,

$$\omega_H : \operatorname{Ext}^1_{MTM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(n)) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1_{MH(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(n))$$

<u>инъект</u>

Эквивалентно,

$$\operatorname{Hom}_{DM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)[i]) = \begin{cases} \mathbb{Q}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, & \text{при } n = i = 1 \\ \mathbb{Q}, & \text{при } n \geq 3 \text{ нечётно}, \ i = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} 4m+1 = 2n - i \\ 2m+1 = n \end{cases} \iff n \text{ нeч.}, \ i = 1. \right]$$

$n = 1$: $\mathbb{Q}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$\forall$ k с $BS(k)$:

$$\omega : MTM(k) \longrightarrow Gr(\mathbb{Q}) \to Vect(\mathbb{Q})$$

("ωdR)

$$1 \to U_M \to G_M \leftrightarrows \mathbb{G}_m \to 1$$

Для $k = \mathbb{Q}$:

$$Ext^2_{MTM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = 0 \quad \forall n \Rightarrow$$

$$U_M = \operatorname{Spec} T\Big(\bigoplus_{n>0} V_n\Big),$$

$$V_n = Ext^1_{MTM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}, & n \geq 3 \text{ нечёт.} \\ 0, & n \text{ чётн} \\ \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, & n = 1 \end{cases}$$

Напомним,

$$MTH(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\omega dR} Vect(\mathbb{Q})$$

$$1 \to U_H \to G_H \leftrightarrows \mathbb{G}_m \to 1$$

$$\omega_H : MTM(\mathbb{Q}) \longrightarrow MTH(\mathbb{Q})$$

соотв.

$$G_M \twoheadleftarrow G_H,$$

сюръекц., т.к.

$$T\Big(\bigoplus_n V_n\Big) \hookrightarrow T\Big(\bigoplus_n V_n^H\Big), \text{ где}$$

$$V_n^H := Ext^1_{MH(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0)_H, \mathbb{Q}(n)_H).$$

__Сл-ие__ $\omega_H : MTM(\mathbb{Q}) \longrightarrow MTM(\mathbb{Q})$

$$\begin{matrix} MTM(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & MTM(\mathbb{Q}) \\ \wr\!\shortparallel & & \wr\!\shortparallel \\ Rep^f(G_H) & & Rep^f(G_H) \end{matrix}$$

полный строгий, образ замкнут отн-но подфакторов.

---

① Оценка на периоды

$$\begin{tikzcd} MTM(\mathbb{Q}) \arrow[r, "\omega_H"] \arrow[rr, bend left, "\omega=\omega_{dR}"] \arrow[rrd, bend right, "\omega_B"'] & (MTM(\mathbb{Q})) \arrow[r, "\omega_{dR}"] \arrow[rd, "\omega_B"] & Vect(\mathbb{Q}) \\ & & Vect(\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

- G_{ω_B} действ. на $I(\omega_{dR}, \omega_B)$
- $Spec(\mathbb{C}) \xrightarrow{comp^*} I(\omega_{dR}, \omega_B)$

__Г-за Гротендика__

$\Downarrow$

$comp^*(*)$ — общ. точка в $I(\omega_{dR}, \omega_B)$

__Явно:__ соотн-ия на абстр. периоды, в $\mathcal{O}(I(\omega_{dR}, \omega_B)) =$

$\ni M$, $\omega_{dR}(M) \otimes \omega_B(M)^\vee$
$MTM(\mathbb{Q})$

$=$ соотношение на ~~периоды~~ периоды, в $\mathbb{C}$.

$\epsilon \in G_{\omega_B}(\mathbb{Q})$, $\epsilon^2 = 1$.

Соотв. $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \circlearrowleft$ комплекс. сопр.

т.к. X — мн-ие $/\mathbb{Q}$.

Лемма Имеется комм. диагр.

$$\begin{tikzcd} I(\omega_{dR},\omega_B) \arrow[r, "comp^*"] \arrow[loop below, "\epsilon"] & Spec(\mathbb{C}) \arrow[loop below, "\tau"] \end{tikzcd}$$

комм. сопр.

Д-во $X/\mathbb{Q}$, σ цикл. на X,

$\omega = f(z)dz$ алг. форма на X.

$$\tau\Big(\int_\sigma \omega\Big) = \int_\sigma \overline{f(z)dz} = \int_\sigma f(\bar z)\,d\bar z = \int_{\epsilon(\sigma)} f(z)\,dz$$

$z = x+iy$, $dz = dx + i\,dy$

f имеет $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ коэф-ты! $\square$

$W_\bullet M$, $M \in MTM(\mathbb{Q})$

$(W_\bullet = W_{2\bullet})$

- Индуц. фил-ю на $\omega_{dR}(W_\bullet M) = W_\bullet(\omega_{dR}(M))$,
- Индуц. фил-ю на $\mathcal{O}(I(\omega_{dR},\omega_B))$, где на $\omega_B(M)$ трив. фил.: $\omega_{dR}(M)\otimes\omega_B(M)^\vee \to \mathcal{O}(I(\omega_{dR},\omega_B))$
- Индуц. фил-ю на $\operatorname{Im}(comp) = P$
- $P_{\geq 0} = \{$периоды M т.ч. $gr^{W}_{<0} M = 0\}$

$P_{\mathbb{R}} = P \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Можно ожидать, что

$$\zeta(\bar{n}) \in P_{\mathbb{R},\geq 0} = P_{\mathbb{R}} \cap P_{\geq 0}$$

<u>Теор.</u>

$$gr^{w}_{\cdot}(P_{\mathbb{R},\geq 0}) \leq \mathbb{Q}[t^2] \otimes_{\mathbb{Q}} T(\oplus_{n\geq 1} V_n)$$

<u>Оп</u> $\tilde{G}_{\mathcal{M}} := \tilde{U}_{\mathcal{M}} \rtimes G_m$, где

$$\tilde{U}_{\mathcal{M}} = \operatorname{Spec}(T(\oplus_{n\geq 3} V_n)) \twoheadleftarrow U_{\mathcal{M}}.$$

<u>Замеч</u>. $\operatorname{Rep}^f(\tilde{G}_{\mathcal{M}}) \hookrightarrow \operatorname{Rep}(G_{\mathcal{M}}) = MTM(\mathbb{Q})$

$$\operatorname{Rep}^f(\tilde{G}_{\mathcal{M}}) = \widetilde{MTM}(\mathbb{Q})$$

$$= \{M \mid W_n/W_{n-2}M \simeq$$

$$\simeq gr^{w}_{n} M \oplus gr^{w}_{n-1} M\}.$$

$$gr^{w}_{n} M \simeq \mathbb{Q}(-n)^{\oplus r_n}, \quad gr^{w}_{n-1} M \simeq \mathbb{Q}(-n+1)^{\oplus r_{n-1}}$$

$$V_1 = \operatorname{Ext}^1_{MTM(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(1)) \rightsquigarrow 0.$$

- $\operatorname{Ext}^1_{\tilde{G}_{\mathcal{M}}}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) = 0$

$$\operatorname{Ext}^1_{\tilde{G}_{\mathcal{M}}}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = V_{n}, \quad n \geq 2.$$

Пусть $\widetilde{P}$ — периоды об в из $\widetilde{MTM}(\mathbb{Q})$.

Теор. $gr^W_\cdot \widetilde{P}_{\mathbb{R},\geq 0} \leq \mathbb{Q}[t^2] \otimes_{\mathbb{Q}} T\left(\bigoplus_{n\geq 3} V_n\right) = (*)$

Утв. Ряд Пуанкаре для $(*)$ равен

$$\frac{1}{1-t^2-t^3}$$

$= T(\mathbb{Q} t^2)$

Д-во. Для $\mathbb{Q}[t^2]$ $\quad 1/(1-t^2)$

- Для $$T\left(\bigoplus_{n\geq 3} V_n\right) = \frac{1}{1-\sum_{n\geq 3} \dim(V_n)\cdot t^n} =$$

$$= \frac{1}{1-t^3(1+t^2+t^4+\dots)} = \frac{1}{1-t^3(1/(1-t^2))}$$

- $$\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{1-t^3\cdot\frac{1}{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{1-t^2-t^3} \quad \square$$

Сл-е $d_n := \dim gr^W_n \widetilde{P}_{\mathbb{R},\geq 0}$

" {веса периодов эфф об в $\widetilde{MTM}(\mathbb{Q})$}

$d_n \leq D_n$, где $D_n = D_{n-2} + D_{n-3}$,

$D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$.

Итак, хотим д-ть, что

$\zeta(\bar{n})$ — (вещ.) периоды эфф. об-в в $\widetilde{MTM}(\mathbb{Q})$.

---

2 MTM($\mathbb{Z}$)

- $k=\mathbb{Q}$, ℓ — простое, p — простое, $p\neq\ell$.
- $1\to I_{\mathbb{Q}_p}\to G_{\mathbb{Q}_p}=Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)\to\hat{\mathbb{Z}}=\langle Fr_p\rangle\to 0$

группа инерции; $G_{\mathbb{Q}_p}\hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$.

- $w_\ell: DM(\mathbb{Q})\longrightarrow Rep^f_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{\mathbb{Q}})\to Rep^f_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{\mathbb{Q}_p})$

Опр $V\in Rep^f_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{\mathbb{Q}})$ неразв. в $p\neq\ell$,

если $I_{\mathbb{Q}_p}$ действ. трив. на V.

Опр $M\in MTM(\mathbb{Q})$ неразв./$\mathbb{Z}$,

если $\forall\ \ell\neq p$

$w_\ell(M)$ неразв. в p.

Опр $MTM(\mathbb{Z})\hookrightarrow MTM(\mathbb{Q})$

|| полная подкат-ия

$\{M$ неразв $/\mathbb{Z}\}$

Утв. $MTM(\mathbb{Z}) = \widetilde{MTM}(\mathbb{Q}) \subset MTM(\mathbb{Q})$

Мотивировка:

$$K_n(\mathbb{Z})_\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} K_n(\mathbb{Q})_\mathbb{Q} \text{ при } n \geq 2.$$

$$K_1(\mathbb{Z})_\mathbb{Q} = 0 \hookrightarrow K_1(\mathbb{Q})_\mathbb{Q}.$$

Пример $a \in \mathbb{Q}^*$, $a \neq 1$.

$$0 \to \mathbb{Q}(0) \to M_a \to \mathbb{Q}(-1) \to 0 \quad \text{мотив Куммера}$$

$$M_a = H_1(\mathbb{G}_m, \{1, a\})$$

$$H_1^\ell(\mathbb{G}_m, \{1, a\}) = \omega_\ell(M_a)(1)$$

$$0 \to \mathbb{Q}_\ell(1) \to \omega_\ell(M_a)(1) \to \mathbb{Q}_\ell(0) \to 0$$

слой над 1 —

это $\mathbb{Q}_\ell(1)$-торсор

$$\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \{(\sqrt[\ell^r]{a}),\ r \geq 1\}$$

Замеч: $v_p(a) = 0 \iff \omega_\ell(M_a)$ неразв.

ДВО

Лемма (i) $\mathrm{Ext}^1_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbb{Q}_\ell(0), \mathbb{Q}_\ell(1)) =$

$$= \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} (\mathbb{Q}_p^*)^\wedge_\ell = p^{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \mathbb{Q}_\ell.$$

$$\mathbb{Q}_p^* \simeq p^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_p^*, \quad \mathbb{Z}_p^* \simeq \mathbb{F}_p^* \times \mathbb{Z}_p,\ p \geq 3$$

$$\mathbb{Z}_2^* \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}_2.$$

(ii) Пусть $V \in \mathrm{Rep}^{f}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{\mathbb{Q}_p})$ т.ч.

$\exists$ w.V, $\mathrm{gr}^W_n V \simeq \mathbb{Q}_\ell(-n)^{\oplus r_n}$.

Пусть $W_n/W_{n-2} V \simeq \mathrm{gr}^W_n V \oplus \mathrm{gr}^W_{n-1} V$.

Тогда V неразветвлено

<u>Д-во</u> (i) очев.

(ii) Действие $G_{\mathbb{Q}_p}$ на $W_n/W_{n-3} V$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q}(-n)^{r_n} & 0 & \chi \\ 0 & \mathbb{Q}(-n+1)^{r_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{Q}(-n+2)^{r_{n-2}} \end{pmatrix}$$

$\chi : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbb{Q}_\ell(-n+2)^{r_{n-2}}, \mathbb{Q}_\ell(-n)^{r_n}) \simeq$

$\simeq \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbb{Q}_\ell, \mathbb{Q}_\ell(2))^{\oplus R} \simeq \mathbb{Q}_\ell(2)^{\oplus R}$

$\chi|_{I_{\mathbb{Q}_p}} : I_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_\ell(2)^{\oplus R}$

эквив. отн-но $G_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p} = \hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{F}_r$

$1 \to W_{\mathbb{Q}_p} \to I_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}_\ell(1) \to 1$

$W_{\mathbb{Q}_p}$ — {про-p-группа}, т.п. $\hat{\ell}$-групп.

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell(1), \mathbb{Q}_\ell(2)) = 0$. $\square$

Лемма (i): $MTM(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \widetilde{MTM}(\mathbb{Q})$

Лемма (ii): $\widetilde{MTM}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow MTM(\mathbb{Z})$ $\square$

---

③ Мотивное пространство путей

Напом-ие: $A^{\bullet}$ комм dg-алгебра, $\alpha, \beta : A^{\bullet} \to k \Rightarrow B(A^{\bullet}; \alpha, \beta)$ бар-компл.

$$\dots \to A^{\bullet \otimes 3} \to A^{\bullet \otimes 2} \to A^{\bullet} \xrightarrow{\alpha - \beta} k$$

$X \in Sm_k$; $a, b \in X(k)$

Рассм косимплиц. мн-ие:

$$\begin{tikzcd} pt \arrow[r, shift left=2, "a"] \arrow[r, shift right=2, "b"'] & X \arrow[l] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r] \arrow[r, shift right=3] & X^2 \arrow[l, shift left=1.5] \arrow[l, shift right=1.5] & \dots \end{tikzcd}$$

$$x \mapsto (a, x)$$
$$x \mapsto (x, x)$$
$$x \mapsto (x, b)$$

$$x \leftarrow\!\shortmid (x, y)$$
$$y \leftarrow\!\shortmid (x, y)$$

$$M_n = \big(\underset{0}{pt} \to \underset{1}{X} \to \underset{2}{X^2} \to \dots \to \underset{n}{X^n}\big)$$

$\in DM(k)$

$$M_n \leftarrow M_{n+1} \leftarrow M_{n+2} \leftarrow \dots$$

$$M_n^\vee \to M_{n+1}^\vee \to \left(M(X)^\vee\right)^{\otimes(n+1)}[n+1]$$

$P(X;a,b) = \operatorname{colim}_n M_n^\vee \in \operatorname{Ind}(DM(k))$

бар комплекс для

$$M(X)^\vee \overset{a^*}{\underset{b^*}{\rightrightarrows}} \mathbb{Q}(0)$$

Утв.: $\omega_B(P(X;a,b)) = B(C^\bullet(X(\mathbb{C})); a^*, b^*)$

- $\omega_{dR}(P(X;a,b)) = B(R\Gamma(X,\Omega^\bullet); a^*, b^*)$

- $H^0(\underbrace{\omega_H(P(X;a,b))}_{D^b(MH(k))}) = \mathcal{O}(\pi_1(X;a,b)_H)$.

Хотим:

"$H^0(P(X;a,b)) \in$
$\in \operatorname{Ind} MM(k)$"

Но $MM(k)$ не существует.

Пусть $M(X) \in DTM(k) \subset DM(k)$.

Замеч. $H^1(\omega_H(M(X))) \in MTH(k)$
$\Downarrow$ "$H^1(X)$"
$H^1(X) \simeq \mathbb{Q}(-1)^{\oplus r}$.

Замеч. $\Downarrow$ $\mathcal{O}(\pi_1(X;a,b)_H) \in$ ~~Ind~~ $MTH(k)$

~~Пример~~ $X = \mathbb{P}^1 \setminus D$.

Тогда $M(x)^\vee \in DTM(k)$,

$M_n, M_n^\vee \in$

$P(X; a,b) \in \mathrm{Ind}\, DTM(k)$.

Если $BS(k)$, то опред.

$H^0(P(X;a,b)) \in \mathrm{Ind}\, MTM(k)$

$\| $

$\mathcal{O}(\pi_1(X;a,b)_M)$.

Утв. Возникает группоид

$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(\pi_1(X;a,b)_M)) = \pi_1(X;a,b)_M$ над $X(k)$.

4 Ещё раз о стр-ре Ходжа на касат. путях

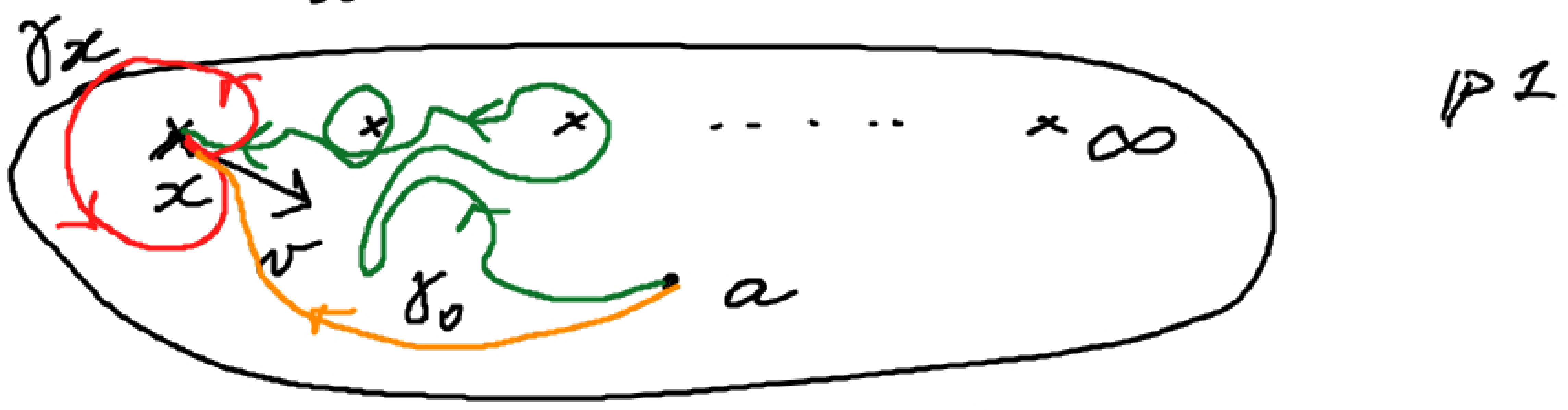
· Пусть $BS(k)$ $\quad |D| = r+1$

· $X = \mathbb{P}^1 \setminus D$, все точки в D над k

$(D = \{0, 1, \infty\})$.

· $x \in D(k)$, $a \in X(k)$, $\infty \in D(k)$

$v \in T_x \mathbb{P}^1$



Хотим: Построить $\pi_1(X; a, v)_M$.

· Для этого:

3-тое вложение

$$\pi_1(X;a,v)_H \hookrightarrow A_{H'}$$

$A_{H'}$ – афф схема в $MTH(k)$

т.ч. $A_H = \omega_H(A_{H'})$, $\qquad \uparrow \omega_H$

A_M – афф схема в $MTM(k)$

<u>Идея:</u> пути из a в b задают вон-мы групп

$$\pi_1(a) \to \pi_1(b).$$

<u>Лемма 1</u> Имеется вложение

$$\pi_1(X(\mathbb{C});a,v) \,/\, \langle\gamma_x\rangle_{\simeq \mathbb{Z}} \overset{(*)}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}(\langle\gamma_x\rangle, \pi_1(X(\mathbb{C});a))$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\gamma \longmapsto (\gamma_x^u \mapsto \gamma\gamma_x^u\gamma^{-1})$$

<u>Д-во.</u> Зафикс. один путь

$\gamma_0 \in \pi_1(X(\mathbb{C});a,v)$

. Тогда $(*)$ отождеств. с

$$\langle\gamma_1,\dots,\gamma_{r+1}\rangle \longrightarrow \mathrm{Hom}(\langle\gamma_1\rangle, \langle\gamma_1,\dots,\gamma_{r+1}\rangle)$$

$$\gamma \longmapsto (\gamma_1^u \mapsto \gamma\gamma_1^u\gamma^{-1})$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 \circ \gamma_x$$

Это задаёт вложение

$$\langle\gamma_1,\dots,\gamma_{r+1}\rangle \big/ Z(\langle\gamma_1\rangle) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\langle\gamma_1\rangle, \langle\gamma_1,\dots,\gamma_{r+1}\rangle).$$

Но $Z(\langle\gamma_1\rangle)=\langle\gamma_1\rangle$. $\square$

<u>Лемма 2</u> Вложение $X\setminus D \hookrightarrow \mathbb{P}^1\setminus\{x,\infty\}$ индуц. вложение мн-в:

$$\pi_1(X;a,v) \xhookrightarrow{(**)} \underset{\substack{\uparrow \\ \langle\gamma_x\rangle\text{-торсор}}}{\pi_1(\mathbb{P}^1\setminus\{x,\infty\};a,v)} \times \mathrm{Hom}(\underset{\substack{\cong \\ \mathbb{Z}}}{\langle\gamma_x\rangle}, \pi_1(X,a))$$

<u>Д-во</u>

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "(**)"] \arrow[d, "/\langle\Delta_x\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \bullet \arrow[d, "/\langle\gamma_x\rangle"] \\
\bullet \arrow[r, "(*)"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$\square$.

<u>Сл-ие</u>

$$\pi_1(X;a,v)^{un}_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1\setminus \overset{\substack{\mathbb{G}_a \\ \cong}}{\{x,\infty\}};a,v)^{un}_{\mathbb{Q}} \times \overbrace{\mathrm{Hom}(\underset{\substack{\| \\ \mathbb{Z}^{un}_{\mathbb{Q}} = \langle\gamma_x\rangle^{un}_{\mathbb{Q}}}}{\mathbb{G}_a}, \pi_1(X,a)^{un}_{\mathbb{Q}})}^{\mathrm{Lie}\,\pi_1(X,a)^{un}_{\mathbb{Q}} \,\cong}$$

з тос Сл-ие

На уровне $MTH(k)$:

$$\pi_1(X;a,v)_H \to \underline{\mathbb{Q}(1)_H} \times \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(1)_H, \underline{\mathrm{Lie}\,\pi_1(X;a)_H}) =$$

$$\pi_1(\mathbb{G}_m)_H = \mathrm{Spec}(T(\mathbb{Q}(-1)_H)) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^\bullet(\mathbb{Q}(-1)_H))$$ группоид над точками и кас. т.

$$\parallel \qquad \curvearrowright$$

$$\underline{\mathbb{Q}(1)_H} \qquad \left(\int_\gamma \underbrace{\omega \ldots \omega}_{n} = \frac{1}{n!}\left(\int_\gamma \omega\right)^n\right)$$

$$= \underline{\mathbb{Q}(1)_H} \times \underline{\mathrm{Lie}\,\pi_1(X,a)_H(-1)}$$

обр предел аффинов в $MTH(k)$.

Но $\mathbb{Q}(1)_H$ и $\mathrm{Lie}\,\pi_1(X;a)_H$ определены мотивно,

т.е. $\mathbb{Q}(1)$ и $\mathrm{Lie}\,\pi_1(X;a)_M \in MTM(k)$.

(есть $BS(k)$)

Пусть $k = \mathbb{Q}$!

Для $x, y \in D(\mathbb{Q})$, $u \in T_x\mathbb{P}^1$, $v \in T_y\mathbb{P}^1$:

- $\pi_1(X;a,v)_M$ опред. т.к.

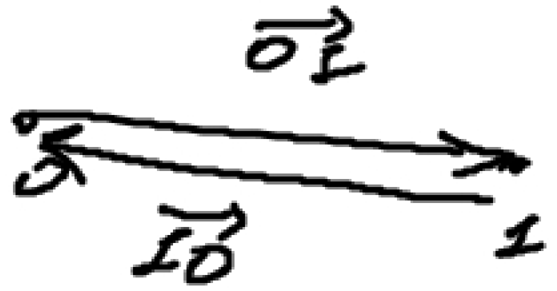
$$\pi_1(X,a,v)_H \hookrightarrow \omega_H\left(\underline{\mathbb{Q}(1)} \times \underline{\mathrm{Lie}\,\pi_1(X,a)_M(-1)}\right)$$

- $\pi_1(X;u,v)_M = \pi_1(X;u,a) \underset{\pi_1(X;a)_M}{\times} \pi_1(X;a,v)_M$.

⑤ Случай $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

Было:

- $X = \mathbb{P}^1 \setminus (\{0,1,\infty\} = D)$



- $\vec{01} \in T_0\mathbb{P}^1$, $\vec{10} \in T_1\mathbb{P}^1$
  "$\vec{0}$" "$\vec{1}$"

- $dch \in \pi_1(X; 0, 1)_B(\mathbb{Q})$.

- $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ допуст., т.е. $n_1 \geq 2$

$\omega(\bar{n}) = \omega_0 \otimes \dots \otimes \omega_1$,

$\omega_0 = \frac{dz}{z}$, $\omega_1 = \frac{dz}{1-z}$

- $\int_{dch} \omega(\bar{n}) = \zeta(\bar{n}) \in \mathbb{R}$

- период $\pi_1(X; \vec{0}, \vec{1})_H$ аффсхема в $MTH(\mathbb{Q})$.

→ веса $\pi_1(X; \vec{0}, \vec{1})_H$ = веса $\pi_1(X; a)$, $a \neq 0, 1$ ≥ 0.

Получили:

$\exists\ \pi_1(X; \vec{0}, \vec{1})_M \in MTM(\mathbb{Q})$ т.ч.

$\omega_H(\pi_1(X; \vec{0}, \vec{1})_M) = \pi_1(X; 0, 1)_H$.

Значит веса $\pi_1(X; \vec{0}, \vec{1})_M$ = веса $\omega_H(\dots)_{\geq 0}$.

Хотим:

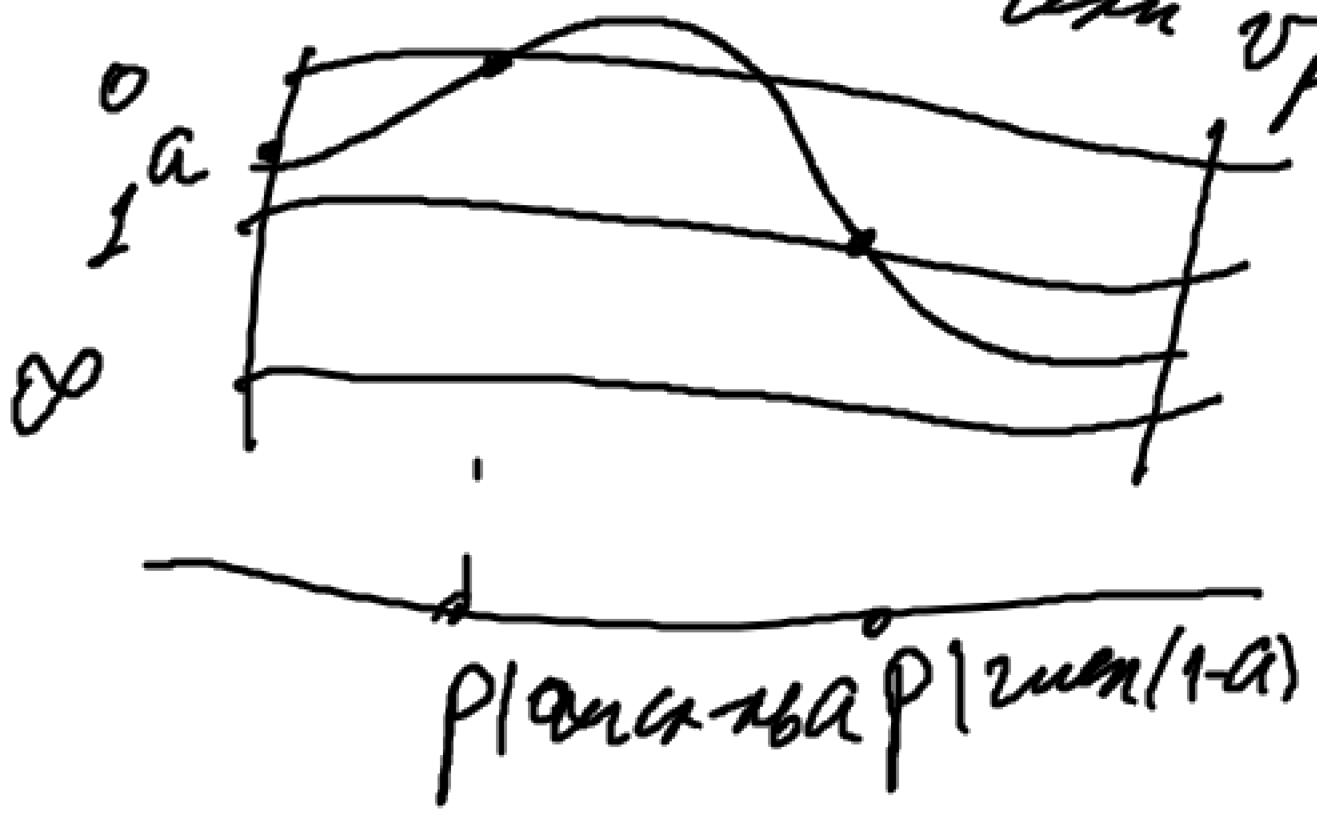
$\pi_1(X; \vec{0}, \vec{1})_M \in MTM(\mathbb{Z}) \hookrightarrow MTM(\mathbb{Q})$?

т.е. неразв-ть $\omega_\ell(\pi_1(X; \vec{0}, \vec{1})_M)$?

$a \in \mathbb{Q}$.

Лемма $\omega_\ell(\pi_1(X; a)_M) \in Rep_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{\mathbb{Q}})$

неразв. вне $\left.\begin{array}{l}\{\ell, p \text{ т.ч. } v_p(a) \neq 0 \\ \text{или } v_p(1-a) \neq 0\end{array}\right\} = S_a$

Д-во 

$\mathfrak{X} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \setminus \{0, 1, \infty\}$

$\downarrow$

$Spec(\mathbb{Z})$

$(\mathfrak{X} \setminus \{0, 1, \infty, a\})|_p \simeq$

$\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p} \setminus \{0, 1, \infty, a_p\}$, где

$a_p = a \pmod p \neq 0, 1$

$\Rightarrow$ корр. опред.

$P(X; a) \pmod p$

$\|$

$P(X \pmod p, a \pmod p)$.

$\omega_\ell(P(X; a)) = \omega_\ell(P(X \pmod p, a \pmod p))$

$\uparrow$

предст-ие $\mathbb{Q}_p$ неразв. $\square$

Сл-ие w_ℓ Lie$(\pi_1(X;a))$ нераз. вне S_a

- w_ℓ $\pi_1(X;a,\vec{0})$ неразв вне S_a
  w_ℓ $\pi_1(X;a,\vec{1})$ неразв
- w_ℓ $\pi_1(X;\vec{0},\vec{1})$ нераз. вне S_a.

Сл-ие

w_ℓ $\pi_1(X;\vec{0},\vec{1})$ нераз.

Д-во $\bigcap_a S_a = \emptyset$. ∎

Пф уов. $MTM(\mathbb{Z}) = MTM(\mathbb{Q})$, получаем

Теор (Делинь-Гончаров, Терасома)

$Z_n := \langle \zeta(\vec{n}),\ |\vec{n}| \le n \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{Q}}(Z_n / Z_{n-1}) \le D_n$,

где $D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$,

$D_n = D_{n-2} + D_{n-3}$.